（内部资料）

极圆与极圆曲面

作者：王锡哲 王乃谦

王锡哲数学与物理工作室

2009 年 9 月

内容简介

书中内容属于解析几何的范畴，主要叙述了不在二次曲线和二次曲面范围内的封闭曲线——极圆和空间极圆曲面“极球”，以及对称的基本概念，它是现代基础数学领域中还没有的两个新论点。书中分别论述了极圆曲线和空间极圆曲面和对称的基本理论、几何性质和相关的理论扩展，对极圆的基本概念进行了较为详细的论述，对极圆几何性质进行了简明论述，对相关理论进行了必要的扩展和延伸。

本书适合研究基础数学理论的学者、教师以及数学爱好者等参考使用。对于那些对解析几何有兴趣的大学生和其他读者也是一本适宜的读物和参考书。

前言

我们在学生时期就学过平面解析几何和空间解析几何，在解析几何里常见的曲线和曲面是二次曲线和二次曲面，二次曲线包括圆锥曲线，包括圆、椭圆、双曲线、抛物线等。二次曲面包括球面、椭球面、双曲面、抛物面、柱面、锥面等。再广泛一些还有标准正态分布曲线（高斯曲线）、玫瑰线、曳物线、悬链线、回旋曲线、渐开线、螺线、阿基米德螺线 、箕舌线 、笛卡儿叶形线 、蔓叶线 、环索线、心脏线、双纽线、摆线等等等等。但本书叙述的不是这些曲线，而是极圆和空间极圆曲面——"极球"。极圆是在平面直角坐标系内的封闭曲线，它与椭圆不同，不一定是二次曲线，可能是二次曲线、三次曲线、四次曲线，甚至是八次曲线等，这还需要进一步的研究。极圆曲面是在空间直角坐标系内，以极圆曲线为基本曲线而构成的空间曲面，是多个定点以一定的数学关系联系起来，符合其数学关系的无数个点的集合构成的曲面。这类曲线和曲面包括圆、椭圆、球面、椭球面等，以及超出圆、椭圆、球面、椭球面范围的更加广泛的曲面范畴。文章所涉及的内容确实不是偏微分方程等高等尖端数学的范畴，但它是现代基础数学领域中还没有的新理论。

本书分为两个主要论观点——极圆曲线和空间极圆曲面，共分六章，分别论述了极圆曲线、空间极圆曲面的基本理论、几何性质和相关的理论扩展；以及在附录中的对称概念。因为不是教材，所以没有习题等内容。基本理论是本书中所讲理论的定义部分，讲述了极圆曲线、空间极圆曲面和对称的基本概念，基本形成了极圆曲线的概念体系。几何性质部分是站在极圆与圆、椭圆相对比的角度，简明论述了极圆的基本几何性质，提出了几个定理。理论扩展部分是对极圆曲线和空间极圆曲面概念的扩展，叙述了几个极圆的特例，并且扩大了极圆曲线和空间极圆曲面的理论范围，将理论引向复数范畴。

本书内容还很不规范，显得有些零乱（毕竟是新理论），还需要

对它进行系统化的分类整理，逐步形成符合极圆和极圆曲面特点的理论体系。

2010 年 9 月 于西安

目　录

第 **1** 章　极圆的定义

极圆是在平面直角坐标系内，多个定点以一定的数学关系联系起来，符合其数学关系的无数个点的集合构成的封闭曲线。这类曲线包括圆、椭圆等，以及超出圆与椭圆的更加广泛的封闭曲线范畴。

1.1　极圆的定义

定义 1：平面直角坐标系内，与多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 的距离 d_0、d_1、d_2……d_n 的和等于常数 d 的动点 $M(x，y)$的轨迹，即到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 距离之和为定值的点的集合称为**极圆**。这些定点 F_0、F_1、F_2……F_n 称为极圆的**极点**，极点坐标为 $F_0(a_0，b_0)$、$F_1(a_1，b_1)$、$F_2(a_2，b_2)$……$F_n(a_n，b_n)$；关于这条极园曲线的所有极点的总和称为此极园的**极点序列**，用 $F_{i\sim n}$ 表示；由极园曲线的所有极点序列构成的集合称为此极园的**极点集合**，用 $F=\{F_i(x_i，y_i)：i=0，1，2……n\}$表示。动点 $M(x，y)$到极点 F_0、F_1、F_2……F_n 的距离 d_0、d_1、d_2……d_n 称为**极距**。常数 d 称为极圆的**极直径**。

如图 1 是 5 个极点的极圆，这个极圆是一个封闭曲线，有 5 个与曲线相关的定点 F_0、F_1、F_2、F_3、F_4，这些定点到曲线上动点 $M(x，y)$ 的连线分别是 F_0M、F_1M、F_2M、F_3M、F_4M，这些连线的和为定值（常数）d。

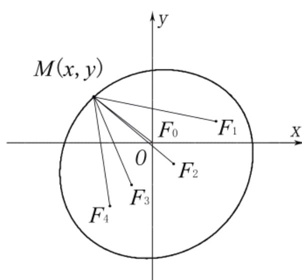


图 1， 5 个极点的极圆

图 2 是 3 个极点的极圆，3 个定点 F_0、F_1、F_2 到曲线上动点 $M(x，y)$ 的连线分别是 F_0M、F_1M、F_2M，这些连线的和也为常数 d。

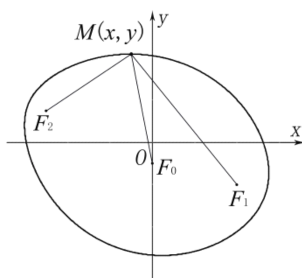


图 2， 3 个极点的极圆

1.2 极圆曲线方程

建立 xy 直角坐标系，设 $M(x，y)$是极圆上任意一点，若 $M(x，y)$点与 F_0、F_1、F_2……F_n 各点的距离的和等于 d，即：

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n$$

式 1-1

则极圆曲线方程为：

$$d=\sqrt{\left(x-a_0\right)^2+\left(y-b_0\right)^2}+\sqrt{\left(x-a_1\right)^2+\left(y-b_1\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{\left(x-a_{\mathrm{n}}\right)^2+\left(y-b_{\mathrm{n}}\right)^2}$$

式 1-2

$$d=\sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{n}}\sqrt{\left(x-a_{\mathrm{m}}\right)^2+\left(y-b_{\mathrm{m}}\right)^2}$$

式 1-3

式 1-1 中：

d 是大于等于 0 的实数，为动点到所有极圆极点距离的总和——极圆极直径；

动点到极点距离集（d_0、d_1、d_2……d_n）中的元素分别是曲线上点 $M(x, y)$到各个极点的距离, d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 为大于等于 0 的实数。

式中所有数为实数。

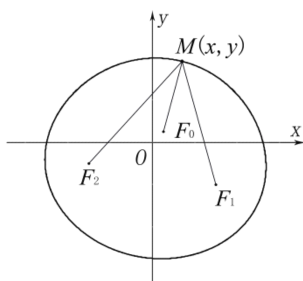


图 3， 3 个极点的极圆

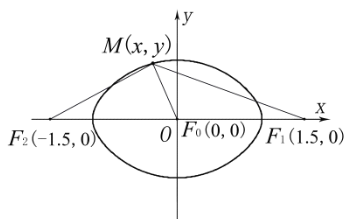


图 4， 3 极点极圆

极圆的形状是多种多样的，可以有类似椭圆扁圆特征的曲线，也可以是类似多边形特征的曲线，有拐点的类似梭形特征的曲线等等。这些曲线的特征都是与极点的数量和极点的分布规律相关

联的。如图 3 是 3 个极点的极圆，图 4 是极点关于原点对称的 3 个极点极圆，图 5 是关于原点对称的 4 个极点极圆，图 6 也是关于原点对称的 3 个极点极圆等。

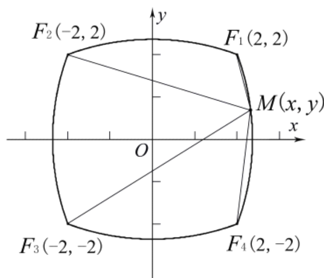


图 5， 4 极点极圆

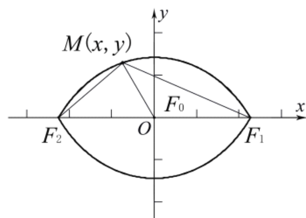


图 6， 3 极点极圆

1.3 极圆的种类

圆的圆点数量为 1，椭圆的焦点数量为 2，在直角坐标系中的分布是有规律的，要么是一个定点，要么是在同一条直线上；圆或椭圆的几何特性是一定得，是已经被广泛认知的，即便是在三维坐标系内，其分布规律仍然是简单的、有规律的。但是极圆的极点数量可以超过 2 个，那么必然存在极点在直角坐标系中的分布是否有规律的问题。极点有规律的分布，可以得到有规律的极圆曲线；极点的不规律分布，致使曲线失去规律性。极圆的极点越多，曲线的复杂程度越高，极圆的极点越少，曲线越趋于规律化。

依据极圆的对称规律特性，把极圆分为不对称极圆、正极圆、轴对称极圆。

1.3.1　不对称极圆

不对称极圆是不关于任何直线和任何点对称的所有极圆的总称，简称极圆；不对称极圆上的点不具有对称性，点和点之间不相互对称。如图 1、2、3 所示极圆都是不对称极圆，它们没有对称轴，曲线上点 $M(x，y)$没有相应的对称点。

1.3.2　正极圆

定义 2：平面直角坐标系内，如果极圆曲线上点以坐标系原点为中心，既关于 x 轴对称，也关于 y 轴对称，也关于原点对称，则称此极圆为**正极圆**。

如图 7(a)所示是 7 极点正极圆曲线，极点 F_0 重合在原点上，是这个正极圆的中点，极点 F_1、F_2、F_4、F_5 在 x 轴上对称分布，F_1 与 F_4 对称， F_2 与 F_5 对称，以原点为对称中心，以 y 轴为对称轴；极点 F_3，F_6 在 y 轴上，并以原点为中心对称，以 x 轴为对称轴。此正极圆曲线是关于 x 轴和 y 轴对称的，同时关于原点对称。

图 7(b)所示曲线上任意点 $P(x，y)$，因为曲线关于原点对称，所以点 P 有关于原点的对称点 $P_1(-x, -y)$，关于 x 轴的对称点 $P_2(x, -y)$，关于 y 轴的对称点 $P_3(-x，y)$也在曲线上，所以此曲线同时关于原点、x 轴、y 轴对称，共有 4 个点相互对称。这种极圆曲线就是正极圆曲线，x 轴、y 轴是正极圆曲线的对称轴，正极圆曲线的对称中心是原点。

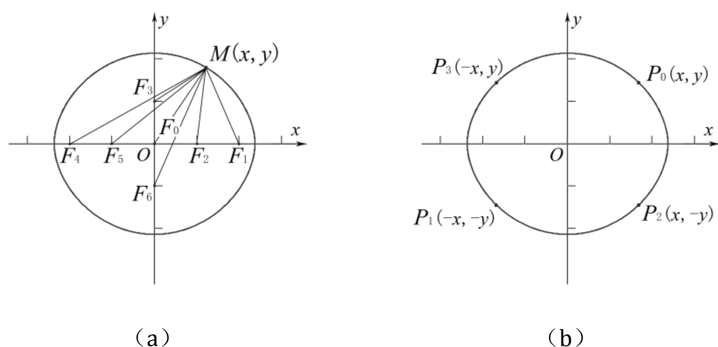


图 7， 7 个极点的正极圆

正极圆的极点不一定必须在坐标轴上。如图 8 所示是 4 极点正极圆曲线，坐标原点上没有极点，极点 F_1、F_2、F_3、F_4 在 4 个象限内，F_1 与 F_2 对称，F_3 与 F_4 对称，以 y 轴为对称轴；F_1 与 F_4 对称，F_2 与 F_3 对称，以 x 轴为对称轴；F_1 与 F_3 对称，F_2 与 F_4 对称，对称中心是原点；4 个极点 F_1、F_2、F_3、F_4 是具有对称关系的。这个正极圆曲线上的点是关于 x 轴、y 轴、原点对称的，以 x 轴、y 轴为对称轴，以原点为对称中心的。

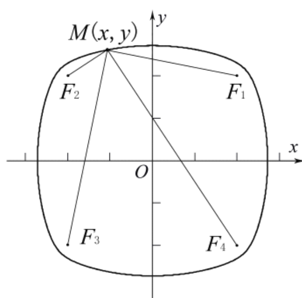


图 8， 4 个极点的正极圆，极点不在坐标轴上

因为上述正极圆是关于原点对称的，所以把这个正极圆称为

“**标准正极圆**”，把对称中心没有落在原点的正极圆称为“正极圆”，这样看起来更为准确。

1.3.3 轴对称极圆

定义 3：平面直角坐标系内，如果极圆曲线上的点只关于一条坐标轴对称则称此极圆为**轴对称极圆**。

如图 9 所示是 4 极点轴对称极圆曲线，图中 F_0 重合在原点上，F_1，F_2 在 y 轴上对称分布，对称中心为 F_0，以 x 轴为对称轴；F_3 在 x 轴上，没有关于 F_0 的对称点。

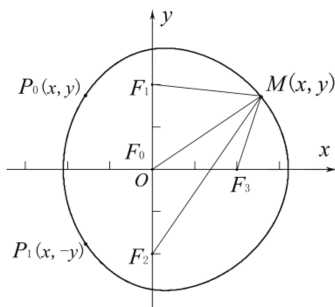


图 9， 4 极点轴对称极圆

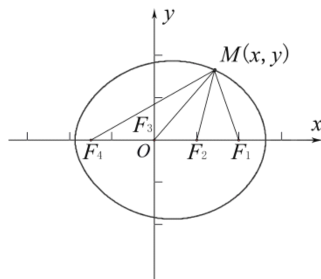


图 10， 4 极点轴对称极圆

此轴对称极圆曲线只有一个对称轴，是关于 x 轴对称的，没有对称中心。因为曲线关于 x 轴对称，所以任意点 $P(x, y)$在曲线上只有一个对称点 $P_1(x, -y)$。

图 10 所示是 4 个极点均在 x 坐标轴上的轴对称极圆，坐标原点上有极点 F_3，极点 $F1$, F_2, F_3, $F4$ 均在x轴上，极点 $F1$, F_2, F_3, $F4$ 之间没有对称中心。这个轴对称极圆曲线以 x 轴为对称轴，也没有对称中心。

第 **2** 章　极圆的几何性质

2.1　范围、顶点、离心率

极圆的几何性质与椭圆不同，椭圆是落在 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 组成的矩形范围中的封闭曲线。由于极圆极点数量与坐标位置的变化，将导致极圆范围、顶点、离心率不能简单的参考椭圆来衡量它，需要其它的论证来阐述它，针对某一个特定的极圆分别去讨论它。

2.1.1　范围与顶点

由于极圆极点位置有自己独有的分布方式，不能简单地判断对称中心和半轴的存在，不能按照椭圆的方法确定极圆曲线的几何范围。图 11 所示是一个不对称 3 极圆，它的几何中心为 $P(a_0,b_0)$，P 点是直线 AB 与直线 CD 的交点，直线 AB 平行于 x 轴，直线 CD 平行于 y 轴；曲线最高点与最低点到直线 AB 的距离相等为 b，曲线最左点与最右点到直线 CD 的距离相等为 a，这个极圆在以 $P(a_0，b_0)$为中心的$\pm a$、$\pm b$ 范围内。

但是，这个极圆几何中心 $P(a_0, b_0)$的确定就不是容易的事情，所以引入“相对几何范围”的概念，即极圆相对于此极圆一个极点的几何范围。对于图 11 所示 3 极圆，它的一个极点 F_0 与坐标原点重合，曲线最高点到 x 轴的距离为 b_1，曲线最低点到 x 轴的距离为 b_2，曲线最右点到 y 轴的距离为 a_1，曲线最左点到 y 轴的距离为 a_2，这个极圆以极点 F_0（原点）为中心的相对几何范围为：$-a_2\le x\le a_1$，$-b_2\le y\le b_1$。

定义 4：已知一极圆，以重合于原点的一个极圆极点为基准，曲线最高点 y 轴坐标参数与 0 的差为 b_1，0 与曲线最低点 y 轴坐

标参数的差为 b_2，曲线最右点 x 轴坐标参数与 0 的差为 a_1，0 与曲线最左点 x 轴坐标参数的差为 a_2，那么，这个极圆以基准极点为中心的**相对几何范围**为：$-a_2 \le x \le a_1$，$-b_2 \le y \le b_1$。

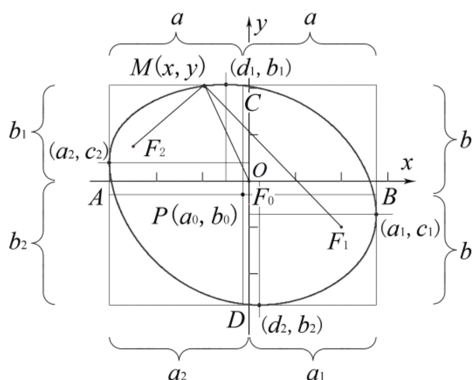


图 11， 不对称 3 极圆

其中：

曲线最高点坐标(d_1，b_1)为上顶点，y 轴坐标参数为 b_1，曲线最低点坐标(d_2，b_2)为下顶点，y 轴坐标参数为 b_2，曲线最右点坐标(a_1，c_1)为右顶点，x 轴坐标参数为 a_1，曲线最左点坐标(a_2，c_2)为左顶点，x 轴坐标参数为 a_2，此极圆以坐标原点为中心的相对几何范围为：$-a_2 \le x \le a1$，$-b_2 \le y \le b1$。

对于正极圆，由于极点位置有规律分布，有对称中心，极点数量较少的正极圆还有明确的半轴（极点数量很多的正极圆形状和特性另行讨论），可以参考椭圆方法确定极圆曲线的几何范围。

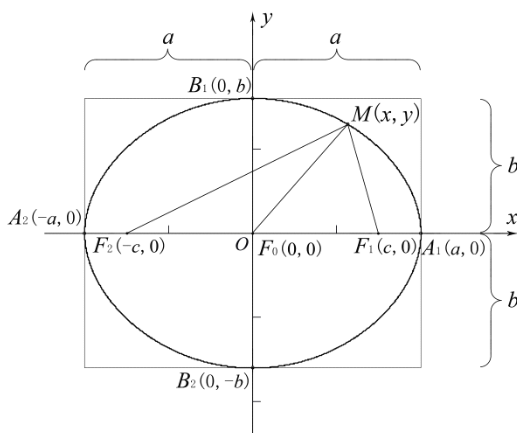


图 12， 正 3 极圆

对于正极圆曲线来说，曲线和对称轴的交点是正极圆的顶点。如图 12 所示是一个正 3 极圆，它的一个极点 $F_0(0，0)$ 为曲线的几何中心，并与原点重合；另外两个极点在 x 轴上对称分布，坐标为 $F_1(c，0)$和 $F_2(-c，0)$，以 $F_0(0，0)$为对称中心。

令 $x=0$，可以得到 $y=\pm b$，点 $B_1(0，b)$、$B_2(0，-b)$是正极圆曲线与 y 轴的两个交点，是正极圆曲线的 y 轴顶点；令 $y=0$，得 $x=\pm a$，点 $A_1(a，0)$、$A_2(-a，0)$是正极圆曲线与 x 轴的两个交点，是正极圆曲线的 x 轴顶点。曲线共有四个顶点 $A_1(a，0)$、$A_2(-a，0)$、$B_1(0，b)$、$B_2(0，-b)$。A_1A_2 是正极圆曲线的 a 轴，a 轴长为 $2a$；B_1B_2 是正极圆曲线的 b 轴，b 轴长为 $2b$。a 是曲线的 a 轴半轴长，b 是曲线的 b 轴半轴长。这个极圆在以 $F_0(0，0)$为中心的$\pm a$、$\pm b$ 范围内。它的相对几何范围与原点几何范围相同，为：$-a\le x\le a$，$-b\le y\le b$。

2.1.2 离心率

对于极圆曲线没有确定的离心率，即使是正极圆曲线，由于极点数量的不同，极点分布的不同，可能有离心现象，也可能没有离心现象。如图 8 正 4 极圆曲线、图 13 正 5 极圆曲线等就没有离心现象。

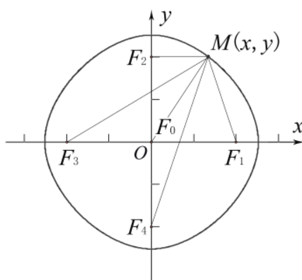
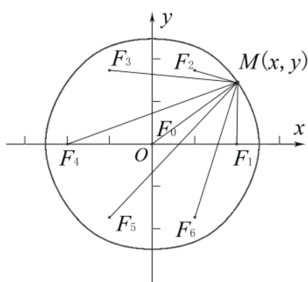


图 13，正 5 极圆没有离心率的状况

而对于具有离心现象的正极圆曲线，需要根据此极圆曲线得出相应的离心率方程，也就是说，极点数量不同的正极圆，曲线的离心率不同；极点数量相同，极点坐标位置不同的正极圆，曲线的离心率也不同。图 12 所示正 3 极圆曲线有离心率；但是图 14 正 7 极圆的 6 个极点在同一圆上，并以原点为中心对称分布，另一极点与原点重合，此正 7 极圆没有离心率；图 15 正 7 极圆的 4 个极点在 x 轴上，并以原点为中心对称分布，2 个极点在 y 轴上，以原点为中心对称分布，另一极点与原点重合，此正 7 极圆有离心率。



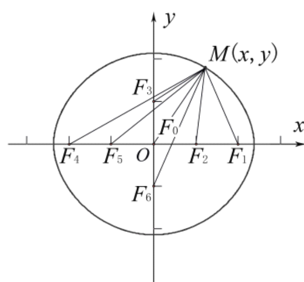


图 14， 正 7 极圆没有离心率的状况　　　图 15，正 7 极圆有离心率的状况

由此可见，正极圆离心率不能简单的像椭圆离心率那样计算，需要针对某一个特定的正极圆分别去讨论它。轴对称极圆和无对称性极圆就不能去讨论离心率了。（如果有讨论的依据，还是讨论的最好。）

2.2　对称性

极圆的对称性有轴对称和原点对称两种状态，轴对称极圆曲线是只关于一条坐标轴对称的。正极圆曲线是关于原点对称，关于两条坐标轴对称的；并且它们的极点也有相同的对称规律。轴对称极圆曲线、正极圆曲线的极点数量和极点坐标，也是关于同一坐标轴和原点对称的，即在对称坐标轴或对称点的一侧有一个极圆极点，那么在此对称坐标轴和对称点另一侧的完全对称位置上也有一个，并且只有一个极圆极点与之对称存在。这就是极圆曲线的极点数量和极点坐标关于坐标轴对称和原点对称的基本概念。对于轴对称极圆曲线，如果在极圆对称坐标 x 轴的一侧有一个极圆极点 F_1 存在，那么在 x 坐标轴另一侧的对称位置上有一个，且只有一个极点 F_2 存在；如图 9 轴对称 4 极圆所示，极点 F_1 与 F_2 关于 x 坐标轴对称。对于正极圆曲线，如果在一象限内有一个极圆极点 F_1 存在，那么在相对象限内，原点另一侧的对称位置上有

一个，且只有一个极点 F_2 存在；如图 14 正 7 极圆所示，极点 F_2 与 F_5 是关于原点对称，F_2 与 F_6 是关于 x 坐标轴对称，F_2 与 F_3 是关于 y 坐标轴对称的，4 个极点相互关于原点对称；对于坐标轴上的极点 F_1、F_4，不是关于坐标轴对称，是关于原点对称的，所以是两点相互关于原点对称。

定理 1：如果极圆的所有极点都在同一坐标轴上，那么这个极圆曲线上点是关于此坐标轴对称的，这个极圆是轴对称极圆，此极圆曲线是关于这一坐标轴对称的。

定理 1 说明：极圆的所有极点在同一坐标轴上时，这个极圆必然是轴对称极圆。

证明：

已知条件：

一个极圆的所有极点都在同一坐标轴上。

分析：

取极圆上一点 P，如果极圆的所有极点都在坐标轴上，极圆曲线上点也是关于坐标轴对称的这一结果成立，那么点 P 关于坐标轴的对称点 Q 必然在曲线上；则点 Q 到坐标轴的距离与点 P 到坐标轴的距离相等，并且点 Q 与点 P 的连线 PQ 垂直于坐标轴。

设：

曲线上任意一点到极圆所有极点的距离集为 U（d_0、d_1、d_2......d_n），点 P 到极圆所有极点的距离集为 UP，点 Q 到极圆所有极点的距离集为 UQ。

极圆方程的简化形式：

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n \qquad \text{式 2-1}$$

式 2-1 中 d_0、d_1、d_2……d_n 是曲线上点 P 到各个极点距离集 U 的元素；

作图 16：

i. 以 x 坐标轴为对称轴作轴对称极圆曲线，曲线被 x 坐标轴平分为对称的两部分；

ii. 取曲线上一点 P，取极点 F、F_1 作为证明基本极点；

iii. 作点 P 与极点 F 的连线 PF，点 P 与极点 F_1 的连线 PF_1，PF、PF_1 是对应式 2-1 中曲线上点 P 到各个极点距离集 UP=（d_0、d_1、d_2……d_n）的相应元素；

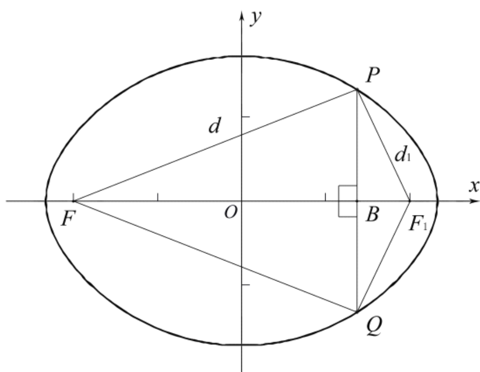


图 16

iv. 作点 P 与 x 坐标轴的垂线 PB，延长垂线 PB 到 Q，使 QB=PB;

v. 作点 Q 与极点 F 的连线 QF，点 Q 与极点 F_1

的连线 QF_1；

判断：

如果能够判断曲线上点 Q 到所有极点的距离等于曲线上点 P 到所有相应极点的距离，即距离集 UP＝（d_0、d_1、d_2……d_n）与距离集 UQ＝（d_0、d_1、d_2……d_n）相等，那么就可以依据式 2-1 确定点 Q 在曲线上是成立的,即证明 UQ＝UP＝U 就证明了定理 1 的成立。

证：

图 16 中，因为 PB 垂直于 x 轴，所以△PBF 是直角三角形，同理，△QBF 也是直角三角形；且 QB=PB，BF 为共有线。

根据三角形定理——如果两个三角形的一个角相等，两条临边相等，那么这两个三角形全等。△PBF 的两条边 PB、BF 的夹角为直角，等于△QBF 的两条边 QB、BF 的夹角。BF=BF，PB=QB，所以△PBF 与△QBF 是全等三角形，PF=QF。同理，△PBF_1 与△QBF_1 也是全等三角形，PF_1＝QF_1。

因此，点 Q 与极点 F 的连线 QF，点 Q 与极点 F_1 的连线 QF_1，也是式 2-1 中曲线上对称点 Q 到各个极点距离集 UQ＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的相应元素。

因为距离集 UP＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的元素与距离集 UQ＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的元素对应相等，所以距离集 UP＝UQ＝U。

故 Q 是这个极圆曲线上的点，定理 1 成立。

图 17 所示是 4 极点轴对称极圆。

这个极圆在坐标原点上有极点 F_2，极点 F_1，F_2，F_3，F_4 均在

x轴上，极点 F_1，F_2，F_3，F_4 之间没有对称中心，有一个对称轴，是关于 x 轴对称。但这个轴对称极圆曲线不是椭圆，不具有椭圆的几何特性，对于原点与 y 轴是不对称。

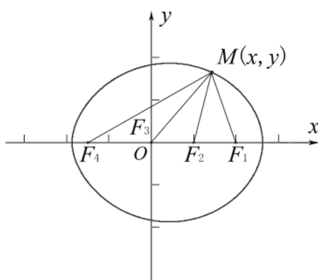


图 17， 轴对称 4 极圆，极点在 x 坐标轴上不均匀分布，曲线关于 x 轴对称

定理 2：极圆所有极点数量和极点坐标是关于同一坐标轴对称分布的，那么这个极圆曲线上点是关于此坐标轴对称的，此极圆曲线是关于坐标轴对称的。

定理 2 说明了轴对称极圆所有坐标轴外的极点，均是在同一坐标轴两侧成对对称存在的。

证明：

已知条件：

一个极圆所有的极点数量和极点坐标是关于 x 坐标轴对称。

分析 1：

极圆所有极点数量和极点坐标是关于坐标轴对称分布的，这里极点可以划分为两种情况：

i. 极圆的部分极点在坐标轴上。依据定理 1，可证明曲线上两个对称点因为这些极点而形成坐

标轴对称关系。

ii. 极圆的其余极点在坐标轴两侧，且极点数量和极点坐标关于这条坐标轴是对称的，这些极点在坐标轴两侧两两对称存在，有一极点 F 就有一个且仅有一个对称极点 E 存在。

分析 2：

取极圆上一点 P，如果坐标轴外的所有极点，其数量和极点坐标是关于坐标轴对称的，极圆曲线上点也是关于坐标轴对称的这一结果成立，那么点 P 关于坐标轴的对称点 Q 必然在曲线上。点 Q 到 x 坐标轴的距离与点 P 到 x 坐标轴的距离相等，并且点 Q 与点 P 的连线 PQ 垂直于 x 坐标轴。

设：

这个极圆有 w 个极点在 x 坐标轴上，有 M 个极点在 x 坐标轴的一侧，有 M 个极点对称分布在 x 坐标轴的另一侧。这样，曲线上的点到极圆所有极点的距离集为 Ud，到 x 坐标轴上 w 个极点的距离集为 Ux，到 x 坐标轴一侧不在坐标轴上 M 个极点的距离集为 UF，到 x 坐标轴另一侧不在坐标轴上 M 个对称极点的距离集为 UE。

点 P 到极圆所有极点的距离集为 UPd，到 x 坐标轴上 w 个极点的距离集为 UPx，到 x 坐标轴一侧不在坐标轴上 M 个极点的距离集为 UPF，点 P 到 x 坐标轴另一侧不在坐标轴上 M 个对称极点的距离集为 UPE。

点 Q 到极圆所有极点的距离集为 UQd，到 x 坐标轴上 w 个极点的距离集为 UQx，到 x 坐标轴一侧不在坐标轴上 M 个极点的距离集为 UQF，到 x 坐标轴另一侧不在坐标轴上 M 个对称极点的距离集为 UQE。

极圆方程的简化形式为：

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n$$

式 2-2

将式 2-2 中距离集 Ud＝（d_0、d_1、d_2……d_n）分成三部分:

一部分是曲线上点到 x 坐标轴上 w 个极点的距离集 Ux＝（dx_0、dx_1、dx_2……dx_w）；

一部分是曲线上点到 x 坐标轴一侧不在坐标轴上 M 个极点的距离集 UF=（df_0、df_1、df_2……df_m）；

一部分是曲线上点到 x 坐标轴另一侧不在坐标轴上 M 个对称极点的距离集 UE＝（de_0、de_1、de_2……de_m）；

得到方程式如下：

$$d = dx_0 + dx_1 + \cdots\cdots + dx_w$$

$$+ df_0 + df_1 + \cdots\cdots + df_{\mathrm{m}} + de_0 + de$$

式 2-3

因此：

$$Ud = Ux + UF + UE$$

式 2-4.1

$$UPd = UPx + UPF + UPE$$

式 2-4.2

$$UQd = UQx + UQF + UQE$$

式 2-4.3

是分别成立的。

这样，只要证明点 Q 确实在极园曲线上，就可以证明曲线是轴对称的。

作图 18：

i. 以 x 坐标轴为对称轴，以极圆所有极点按照其数量和极点坐标是关于坐标轴对称分布的原则作极圆曲线，曲线被 x 坐标轴平分为两部分；

ii. 取极点 F 和它的对称极点 E 作为证明基本极点，作极点 F 与极点 E 的连线 FE，FE 与 x 坐标轴的交点为 O；因为极点 F 与 E 是关于 x 坐标轴对称的，则极点 F 到 x 坐标轴的距离 FO 与极点 E 到 x 坐标轴的距离 EO 相等，并且点 F 与点 E 的连线 FE 垂直于 x 坐标轴；

iii. 取曲线上一点 P；作点 P 与极点 F 的连线 PF，点 P 与极点 E 的连线 PE，PF 是对应式 2-3 中曲线上点 P 到 x 坐标轴一侧不在坐标轴上的 M 个极点距离集 UPF＝（df_0、df_1、df_2......df_m）的相应元素，即 UPF＝UF；PE 是对应式 2-3 中曲线上点 P 到 x 坐标轴另一侧不在坐标轴上的 M 个极点距离集 UPE＝（de_0、de_1、de_2......de_m）的相应元素，即 UPE＝UE；

iv. 作点 P 与 x 坐标轴的垂线 PB，延长垂线 PB 到 Q，使 QB＝PB；

v. 作点 P 与 FE 的垂线 PA，交点为 A；

vi. 作点 Q 与极点 F 的连线 QF，点 Q 与极点 E 的连线 QE；

vii. 作点 Q 与 FE 的垂线 QC，交点为 C；

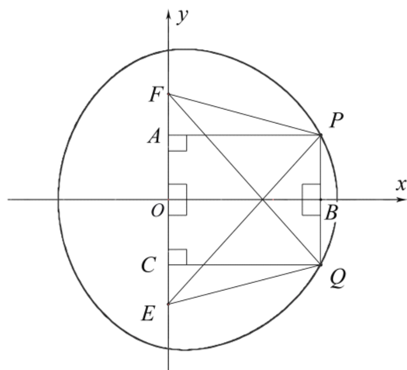


图 18

判断：

如果能够判断曲线上点 *Q* 到所有极点的距离之和，等于曲线上点 *P* 到所有相应极点的距离之和，那么就可以依据式 2-3 确定点 *Q* 在曲线上，式 2-4.1、式 2-4.2、式 2-4.3 就是成立的，即可证明集合 *UQd*＝*UPd*＝*Ud*，*UQx*＝*UPx*＝*Ux*，*UQF*＝*UPF*＝*UF*，*UQE*＝*UPE*＝*UE*，就证明了定理 2 的成立。

证：

根据定理 1，可以证明 *Q* 点到 *x* 坐标轴上极点的距离集 *UQx*＝（dx_0、dx_1、dx_2……dx_w）的元素，与 *P* 点到 *x* 坐标轴上对应极点的距离集 *UPx*＝（dx_0、dx_1、dx_2……dx_w）的元素对应相等，所以距离集 *UQx*＝*UPx*＝*Ux*（过程略）。

图 18 中，因为 *PA* 垂直于 *FE*，*QC* 垂直于 *FE*，*PQ* 垂直于 *x* 轴，*FE* 也垂直于 *x* 轴，所以，*PQCA* 是矩形，所以 *PA*＝*QC*；又因为 *PB*＝*QB*，所以 *AO*＝*OC*。

因为 $FO=EO$，且 $AF=FO-AO$，$CE=EO-CO$，所以：$AF=CE$。

因为 $AE=EO+AO$，$CF=FO+CO$，所以：$AE=CF$。

因为 PA 和 QC 垂直于 FE,所以△PAF 和△PAE 是直角三角形，同理△QCF 和△QCE 也是直角三角形。根据三角形定理——如果两个三角形的一个角相等，两条临边相等，那么这两个三角形全等。△PAE 的两条边 PA、AE 的夹角为直角，等于△QCF 的两条边 QC、CF 的夹角。$AE=CF$，$PA=QC$，所以△PAE 与△QCF 是全等三角形，所以 $PE=QF$。同理，△PAE 与△QCF 也是全等三角形，$PF=QE$。

因此，点 Q 与极点 F 的连线 QF,点 Q 与极点 E 的连线 QE,同样是式（6）中曲线上对称点 Q 到对应 x 坐标轴两侧各个极点的距离集 UQF（df_0、df_1、df_2……df_m）和 UQE（df_0、df_1、df_2……df_m）的相应元素；

因为距离集 UQF（df_0、df_1、df_2……df_m）的元素与距离集 UPF（df_0、df_1、df_2……df_m）的元素对应相等；UQE（de_0、de_1、de_2……de_m）的元素与 UPE（de_0、de_1、de_2……de_m）的元素对应相等；所以距离集 $UPF=UQF$，$UPE=UQE$。已知距离集 $UPF=UF$，$UPE=UE$，$UQx=UPx=Ux$，所以 $UQF=UPF=UF$，$UQE=UPE=UE$，得 $UQx=UPx=Ux$。

故 Q 是这个极圆曲线上的点，定理 2 成立。

2.3　正极圆的多轴对称性

正极圆是关于原点对称，也是关于 x 轴和 y 轴对称的。但是正极圆还能够关于数条不同角度的直线对称。如图 19 正 7 极圆，此曲线上点是关于原点对称的，同时也关于 x 轴和 y 轴对称，并且关于多条直线对称，即关于图上所示对称线 1、对称线 2、对称线 3、对称线 4 对称。

图 19 中正 7 极圆曲线，极点坐标分别是 $F_0(0，0)$、$F_1(2c，0)$、$F_2(c，\sqrt{3}c)$、$F_3(-c，\sqrt{3}c)$、$F_4(-2c，0)$、$F_5(-c，-\sqrt{3}c)$、$F_6(c，-\sqrt{3}c)$。极圆上点 $A(x，y)$关于原点对称，就是说既关于 x 轴对称，也关于 y 轴对称，关于 y 轴的对称点是 $A_1(-x，y)$，关于 x 轴的对称点是 $A_2(x，-y)$，关于原点的对称点是 $A_3(-x，-y)$。但是，此极圆不仅只关于 x 轴、y 轴对称，还存在另外 4 条对称线——对称线 1、对称线 2、对称线 3、对称线 4；极圆上点 $A(x，y)$关于对称线 1 的对称点是 A_4，关于对称线 2 的对称点是 A_5，关于对称线 3 的对称点是 A_6，关于对称线 4 的对称点是 A_7。由此可见，这个极圆是关于原点对称的，同时关于 x 轴、y 轴、对称线 1、对称线 2、对称线 3、对称线 4 对称的，共有 7 个对称点与 $A(x，y)$对称。

对称线方程式为：

$x = 0$ x 轴对称

$y = 0$ y 轴对称

$y = \sqrt{3}x$ 对称线 1 对称

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 对称线 2 对称

$y = -\sqrt{3}x$ 对称线 3 对称

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 对称线 4 对称

$x = y = 0$ 原点对称

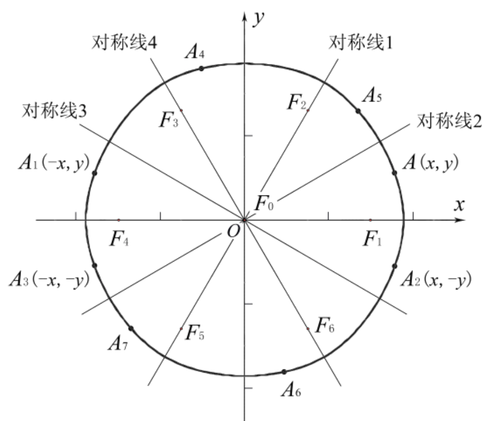


图 19，正 7 极圆关于原点和另外 6 条直线对称

因此这个正 7 极圆完整的方程式为：

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + \left(y - \sqrt{3}c\right)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + \left(y - \sqrt{3}c\right)^2}$$

$$+ \sqrt{(x + 2c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + \left(y + \sqrt{3}c\right)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + \left(y + \sqrt{3}c\right)^2}$$

式 2-5

其对称线方程为：

$x = 0$ x轴对称

$y = 0$ y轴对称

$y = \sqrt{3}x$ 对称线 1 对称

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 对称线 2 对称

$y = -\sqrt{3}x$ 对称线 3 对称

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$ 对称线 4 对称

$$x=y=0$$ 原点对称

$$d=3a+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}+2\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}$$

极圆极直径

同样，对于图 20 正 5 极圆，曲线是原点对称的，同时还有 4 条对称线。

这个正 5 极圆完整的方程式为：

$$d=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

式 2-6

式 2-6 中 c 为极点 F_1、F_2、F_3、F_4 到原点的距离。

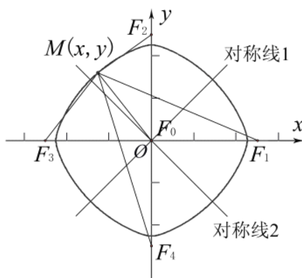


图 20， 正 5 极圆关于原点和另外 4 条直线对称

对称线方程：

$$x=0$$ x 轴对称

$$y=0$$ y 轴对称

$y = x$ 对称线 1 对称

$y = -x$ 对称线 2 对称

$x = y = 0$ 原点对称

$d = 2c + 2\sqrt{a^2 + c^2}$ 极圆极直径

2.4 圆

圆是椭圆的特殊情况，如果一个椭圆的两个焦点重合，则这个椭圆是圆。另一方面，圆也是极圆的特殊状态，无论极圆的极点有多少个，如果这个极圆所有的极点重合为一点，或者这个极圆的极点数量为 1，那么，这个极圆同样也是圆。如图 21，是一个有 6 个极点的极圆，它们的 6 个极点重合于坐标系原点，这个极圆是圆。

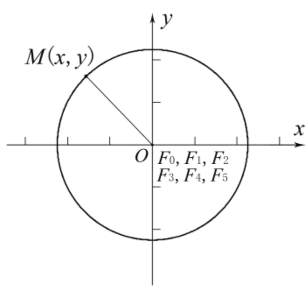


图 21，极点重合于原点的 6 个极点正极圆

定理 3： 所有极点重合于一点的极圆是圆，圆心在极点上，

圆半径为 d/n。

证明：

已知：一个极圆的所有极点重合于坐标系原点。

因此：曲线上点 $M(x，y)$到所有极点的距离相等。

依据极圆曲线方程

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n$$

可知：

$$d = d_0 = d_1 = \cdots\cdots = d_n$$

所以极圆曲线方程为：

$$d = nd_0$$

而且有：

$$\frac{d}{n} = d_0$$

因为：

$$d_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

所以方程式可以转化为：

$$\left(\frac{d}{n}\right)^2 = x^2 + y^2$$

这是标准的半径为 d/n 的圆方程，因此定理 3 成立。

2.5 椭圆

椭圆是极圆的特殊状态，如果一个极圆的极点为两个，则这个极圆是椭圆；或者说，极点数量为偶数，其中一半极点重合于点 F_1，相同数量的另一半极点重合于点 F_2，且点 F_1 与点 F_2 不重合，这个极圆一定是椭圆。图 22 中，6 个极点的正极圆的 3 个极点 F_1，F_2，F_3 重合于点 F_1，3 个极点 F_4，F_5，F_6 重合于点 F_4，6 个极点的数量和坐标均关于 y 轴对称，这个极圆就是一个椭圆，

具有椭圆的几何特性，是关于 x 轴与 y 轴对称，也关于原点对称；但是，如果两个重合点上的重合极点数量不同，即使是只有两个重合点，这个极圆也不是椭圆，如图 23，6 个极点的极圆的 2 个极点 F_1，F_2 重合于点 F_1，4 个极点 F_3，F_4，F_5，F_6 重合于点 F_3，它们的极点坐标参数关于 y 轴对称；但是，由于极点数量不对称，这个极圆不是椭圆，不具有椭圆的几何特性，只有一个对称轴，是关于 x 轴对称，对于原点与 y 轴是不对称的。

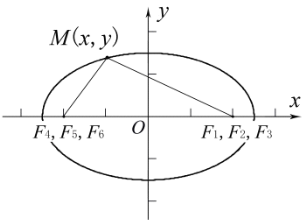


图 22，3 个极点和 3 个极点关于 y 轴的数量和坐标均对称

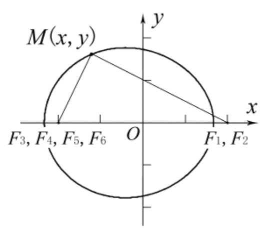


图 23，6 个极点坐标关于 y 轴对称，但极点数量不对称

定理 4：如果一个极圆的极点数量为偶数，其中 1/2 的极点重合于一点，1/2 的极点重合于另一点，这个极圆是椭圆。

证明：

已知：一个极圆的极点数量为偶数 n，为 F_1、F_2……F_n，其中 $n/2$ 的极点重合于一点 F_1（a_1，b_1），另外 $n/2$ 的极点重合于另一点 F_n（a_n，b_n）。

因此：曲线上点 $M(x，y)$到极点 F_1、F_n 的距离为 d_1、d_n。

依据极圆曲线方程

$$d = d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_n$$

可知：

$$d_1 = d_1 = d_2 = \cdots\cdots = d_{n/2}$$

$$d_n = d_{n/2+1} = d_{n/2+2} = \cdots\cdots = d_n$$

所以：

$$d = \frac{n}{2} d_1 + \frac{n}{2} d_n$$

极圆曲线方程推导变为下述过程：

$$\frac{2d}{n} = d_1 + d_n$$

因为：

$$d_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}$$

$$d_n = \sqrt{(x - a_\text{n})^2 + (y - b_\text{n})^2}$$

所以方程式为：

$$\frac{2d}{n} = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} + \sqrt{(x - a_\text{n})^2 + (y - b_\text{n})^2}$$

这与椭圆方程一致，因此定理 4 成立。

2.6 拐点

一个方程所描述曲线的曲率半径通常是连续变化的，不会出现曲率半径突变的拐点。但是有一些极圆在特定的条件下，曲线出现了拐点。如图 24 所示，在极圆极直径为一特定值时，使正 4 极圆的极点落在曲线上。此时这个正 4 极圆在极点处出现拐点。同样，图 25 所示，正 4 极圆在极点处也出现拐点。

图 24 正 4 极圆的极点坐标分别为 $F_1(c,c)$、$F_2(-c,c)$、$F_3(-c,-c)$、$F_4(c,-c)$，在极圆极直径 $d=4c+2\sqrt{2}c$ 时极圆的极点落在曲线上，并在极点 F_1、F_2、F_3、F_4 处出现拐点。（图中 c=2）

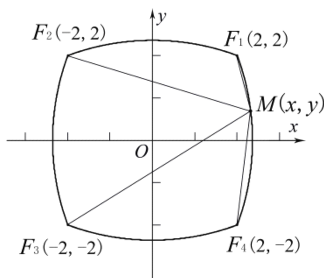


图 24，正 4 极圆的极点在曲线上时，在极点处出现拐点

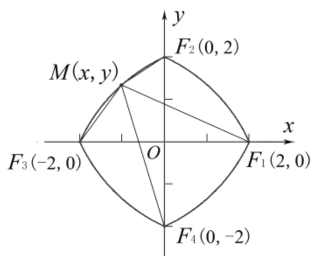


图 25，正 4 极圆的极点在曲线上时，在顶点处出现拐点

图 25 正 4 极圆的极点坐标分别为 $F_1(c, 0)$、$F_2(0, c)$、$F_3(-c, 0)$、$F_4(0, -c)$，在极圆极直径 $d = 2c + 2\sqrt{2}c$ 时极圆的极点落在曲线上，极点与顶点重合，并在极点 F_1、F_2、F_3、F_4 点处出现拐点。（图中 c=2）

图 26 所示，正 3 极圆同样在极点处出现拐点。正 3 极圆的极点坐标分别为 $F_0(0, 0)$、$F_1(-c, 0)$、$F_2(0, c)$在极圆极直径＝$3c$ 时极圆的两个极点落在曲线上，并在极点 F_1、F_2 处出现拐点。（图中 c=2.25）

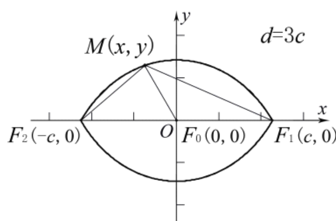


图 26，正 3 极圆的极点在曲线上时，在两个极点处出现拐点

2.7 极点的位置和极圆极直径

圆和椭圆的圆点及焦点一定在圆或椭圆内的，但是极圆的极点可以在极圆外（除圆和椭圆外），也可以在极圆内，还可以在极圆上。而极圆极直径有其特有的特性，是与极圆本身的特征相关联的；在极圆极直径 d 发生变化时，极点在极圆上的位置也发生了变化。图 22 轴对称极圆的 6 极点都在极圆内。

图 27（a）、（b）、（c）所示均为正 4 极圆，它们的极点坐标相同，四个极点的坐标分别为 $F_1(c, 0)$、$F_2(0, c)$、$F_3(-c, 0)$、$F_4(0, -c)$(其中 c=2)；顶点坐标分别为 $A_1(a, 0)$、$A_2(-a, 0)$、$B_1(0, b)$、$B_2(0, -b)$；这个正 4 极圆的范围为：$-a \le x \le a$，$-b \le y \le b$。但是，由于极圆

极直径的不同，极点与曲线的位置关系也不同，极点或在极园内，或在极园上，或在极园外；顶点也或在极园外，或在极园上，或在极园内。

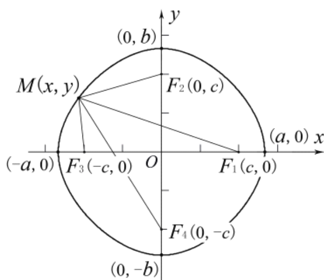
图 27（a）所示极圆 4 个对称极点全在曲线内时，$d = 2a + 2\sqrt{a^2 + c^2}$， $a=b>c$；顶点在极点外。

图 27（b）所示极圆 4 个极点全在曲线上时，$d = 2c + 2\sqrt{2}c$， $a=b=c$；顶点在极点上。

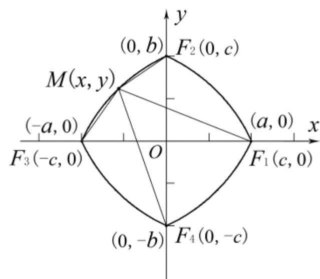
图 27（c）所示极圆 4 个极点全在曲线外时，$d = 2c + 2\sqrt{a^2 + c^2}$， $a=b<c$；顶点在极点内。

d 的最小值为 $d=4c$，此时曲线变为一个点。

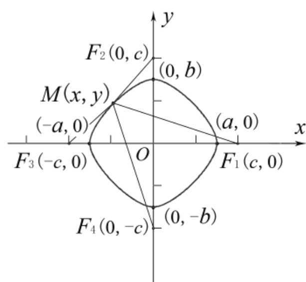
（其中 c 是极点 F_1、F_2、F_3、F_4 到原点的距离；a 是 x 轴半轴长，是 x 方向顶点到原点的距离；b 是 y 轴半轴长，是 y 方向顶点到原点的距离。）



（a）全部极点在极圆内



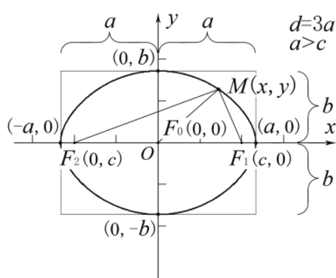
（b）全部极点在极圆上



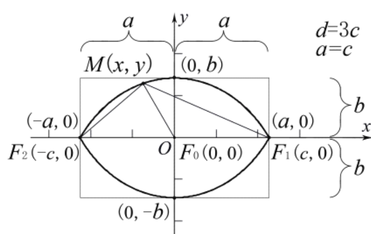
（c）全部极点在极圆外

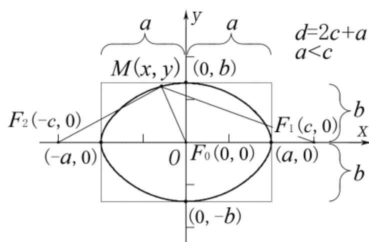
图 27，正 4 极圆

图 28 所示正 3 极圆，它的极点坐标分别为 F_0(0，0)、F_1(c，0)、F_2(-c，0)，顶点坐标分别为 A_1(a，0)、A_2(-a，0)、B_1(0，b)、B_2(0，-b)；这个正 3 极圆的范围为：$-a \le x \le a$，$-b \le y \le b$。



（a）两个极点在极圆内





（b）两个极点在极圆上　　　　　　（c）两个极点在极圆外

图 28，正 3 极圆的一个极点在原点上

图 28（a）极圆 3 个极点均在曲线内时，　$d = 3a$，

$a > c$；

图 28（b）极圆 2 个极点在曲线上，一个在曲线内时，

$d = 3c$，　$a = c$；

图 28（c）极圆 2 个极点在曲线外，一个在原点上时，

$d = 2c + a$，　$a < c$；

d 的最小值为 $d=2c$。

（其中 c 是极点 F_1、F_2 点到原点的距离，a 是 x 轴半轴长，是 x 轴顶点到原点的距离；b 是 y 轴半轴长，是 y 方向顶点到原

点的距离。）

图 29 所示正 7 极圆，它的极点坐标分别为 F_0(0，0)、F_1(2，0)、F_2(1，$\sqrt{3}$)、F_3(-1，$\sqrt{3}$)、F_4(-2，0)、F_5(-1，-$\sqrt{3}$)、F_6(1，-$\sqrt{3}$)，$d=5c+2\sqrt{3}c=10+4\sqrt{3}$，（$a$ 是 x 轴顶点到原点的距离，c 是除 F_2 极点外，其余极点到原点的距离，图中 c＝2）。它的极点有 6 个在极圆曲线上，一个在原点上。

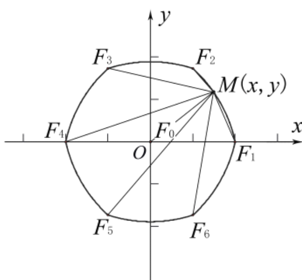


图 29，正 7 极圆的 6 个极点在极圆上，1 个极点在原点上

极圆所有极点在曲线内时，

$$d=3a+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}+2\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}，\quad a>c；$$

极圆 6 个极点在曲线上时，$d=5c+2\sqrt{3}c$，$a=c$；

极圆 6 个极点在曲线外时，

$$d=3c+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}+2\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}，\qquad a<c；$$

d 的最小值为 $d=6c$。

（c 是 F_1 点到 F_0 点的距离，a 是 x 轴半轴长）

图 30 所示正 7 极圆的 6 个极点 F_0、F_1、F_2、F_4、F_5、F_6 在坐标轴上，极点 F_0、F_1、F_2、F_4、F_5 在 x 轴上等距对称分布，极点间距离为 c；极点 F_0、F_3、F_6 在 y 轴上等距对称分布，极点间距离为 c；极点 $F0$ 在原点上，极点坐标分别为 $F_0(0，0)$、$F_1(2c，0)$、$F_2(c，0)$、$F_3(0，c)$、$F_4(-2c，0)$、$F_5(-c，0)$、$F_6(0，-c)$。

所有极点在极圆曲线内时，

$$d=5a+2\sqrt{a^2+c^2}，\qquad a>2c；$$

2 个对称极点 F_1、F_4 在极圆曲线上时，

$$d=10c+2\sqrt{5}c，\qquad a=2c；$$

2 个对称极点 F_1、F_4 在极圆曲线外，5 个极点在曲线内时，

$$d=3a+4c+2\sqrt{a^2+c^2}，\qquad 2c>a>c；$$

2 个对称极点 F_2、F_5 在极圆曲线上时，

$$d=7c+2\sqrt{2}c，\qquad a=c；$$

6 个对称极点在极圆曲线外时，

$$d=a+6c+2\sqrt{a^2+c^2}，\qquad a<c；$$

d 的最小值为 $d=8c$。

（c 是 F_1 点到 F_0 点的距离，a 是 x 轴半轴长）

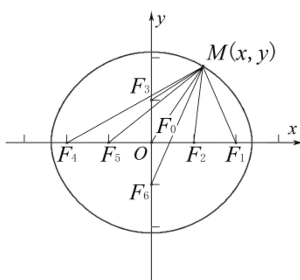


图 30，正 7 极圆的 6 个极点在坐标轴上，1 个极点在原点上

极圆极直径的最小值是随着极圆极点数量的不同而不同，随着极圆极点的分布不同而不同。

2.8　同极圆

在解析几何中，中心重合直径不同的圆叫做同心圆，同心圆具有形状相同，半径不同的特点。在极园的范畴内，不同的极园在具有相同的极点序列情况下，极圆极直径的不同，曲线的形态是不同的。

定义 5：平面直角坐标系内，具有同一极点序列而极直径不同的极圆称为**同极圆**。

图 31 所示 6 极点极圆，极点 F_1、F_2、F_4 在 x 坐标轴上，极点 F_3、F_5 在 y 轴上，极点 F_0 在原点上。它的极点坐标分别为 F_0(0，0)、F_1(2，0)、F_2(3，0) 、F_3(0，2)、F_4(-1，0) 、F_5(0，-2)。

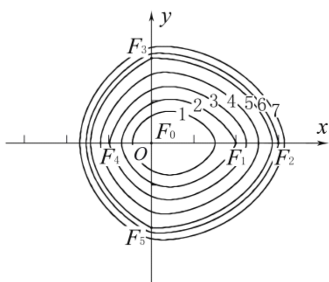


图 31，6 极点同极圆

图 31 中的七条曲线具有形同的极点序列，只是极圆极直径不同，却有着不同的形状。

曲线 1，只有一个极点 F_0 在极圆曲线内，其余极点在极圆曲线外时，d=11；

曲线 2，有一个极点 F_0 在极圆曲线内，一个极点 F_1 在极圆曲线上，其余极点在极圆曲线外时，;

曲线 3，有两个极点 F_0、F_1 在极圆曲线内，一个极点 F_4 在极圆曲线上，其余极点在极圆曲线外时，;

曲线 4，有三个极点 F_0、F_1、F_4 在极圆曲线内，其余极点在极圆曲线外时，d=13.5；

曲线 5，有三个极点 F_0、F_1、F_4 在极圆曲线内，两个极点 F_3、F_5 在极圆曲线上，一个极点在极圆曲线外时，;

曲线 6，有五个极点 F_0、F_1、F_4、F_3、F_5 在极圆曲线内，一个 F_2 极点在极圆曲线上时，;

曲线 7，所有极点均在极圆曲线内，d=16。

图 32 所示 5 极点极圆，极点 F_1、F_2、F_3、F_4 在 x 坐标轴上，极点 F_0 在原点上。它的极点坐标分别为 F_0(0，0)、F_1(1，0)、F_2(2，0)、F_3(-1，0)、F_4(-2，0)。

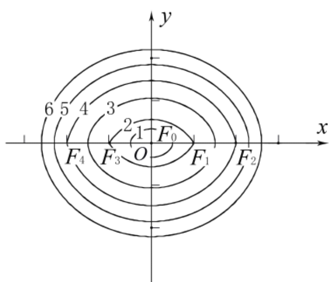


图 32，5 极点同极圆

图 32 中的六条曲线具有形同的极点序列，极圆极直径不同,形状不同但类似。

曲线 1，只有一个极点 F_0 在极圆曲线内，其余极点在极圆曲线外时，d=6.5；

曲线 2，有一个极点 F_0 在极圆曲线内，一个极点 F_1 在极圆曲线上，其余极点在极圆曲线外时，d=7；

曲线 3，有三个极点 F_0、F_1、F_3 在极圆曲线内，其余极点在极圆曲线外时，d=8.5；

曲线 4，有三个极点 F_0、F_1、F_3 在极圆曲线内，两个极点 F_2、F_4 在极圆曲线上，其余极点在极圆曲线外时，d=10；

曲线 5，所有极点均在极圆曲线内时，d=11.5。

曲线 6，也是所有极点均在极圆曲线内时，d=13。

其中，1、3、5、6 这四条曲线相似，曲线 2、4 相似。

第 3 章　极圆的扩展

3.1　曳线极圆

椭圆作图法有拉线法，参考此方法同样可以作出极圆的曲线，但是有所不同，因为拉线的关系，动点到起始极点和结束极点的距离只计入 1 倍的长度，而其它极点距离需要计入 2 倍的长度，因此，极圆方程式（1）、式（2）、式（3）就不适应了。

定义 6：平面直角坐标系内，一动点到定点 F_0、F_n 的距离与到多个定点 F_1、F_2……$F_{n\text{-}1}$ 的 2 倍距离之和为定值 d 的点的轨迹，称为**曳线极圆**。

曳线极圆方程：

$$d = d_0 + 2d_1 + \cdots\cdots + 2d_{n-1} + d_n$$

式 3-1

$$d=\sqrt{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2}+2\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+2\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$

$$+\cdots\cdots+2\sqrt{(x-a_{n-1})^2+(y-b_{n-1})^2}+\sqrt{(x-a_n)^2+(y-b_n)^2}$$

式 3-2

$$d=\sqrt{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2}+2\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{(x-a_m)^2+(y-b_m)^2}+\sqrt{(x-a_n)^2+(y-b_n)^2}$$

式 3-3

式中 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 分别是曲线上点 $M(x，y)$到各个极点的距离。d 及 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 为大于等于 0 的实数。

（*注：如果拉线法的拉线起始点和结束点同为动点的话，曳线极圆就变成极直径为 d/2 的普通极园。*）

3.2　因数极圆

与曳线极圆相类似，如果曲线上点 $M(x，y)$到各个极点的距离计入曲线方程的次数不是 1，那么，极圆方程式就发生了改变。

定义 7: 平面直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 距离与相应点几何因数 k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 乘积后的总和为定值 d 的点的轨迹，称为**因数极圆**。

因数极圆方程：

$$d = k_0 d_0 + k_1 d_1 + \cdots\cdots + k_{n-1} d_{\mathrm{n-1}} + k_n d_{\mathrm{n}}$$ 式 3-4

$$d = k_0\sqrt{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2} + k_1\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2} + \cdots\cdots + k_n\sqrt{(x-a_{\mathrm{n}})^2+(y-b_{\mathrm{n}})^2}$$

式 3-5

$$d = \sum_{\mathrm{m=0}}^{\mathrm{n}} k_m\sqrt{(x-a_{\mathrm{m}})^2+(y-b_{\mathrm{m}})^2}$$

式 3-6

式中 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 分别是曲线上点 $M(x，y)$到各个极点的距离。k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 分别是各个极点的几何因数，表示曲线上点 $M(x，y)$相对应到各个极点的距离计入方程的系数（次数）。d 及 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 为

大于等于 0 的实数。

3.3 平方距极圆（圆）

定义 8: 平面直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 距离平方的和为定值 d 的点的轨迹，称为**平方距极圆**。

平方距极圆方程：

$$d = d_0^{\ 2} + d_1^{\ 2} + \cdots\cdots + d_{n-1}^{\ 2} + d_n^{\ 2} \qquad \text{式 3-7}$$

$$d = \left((x-a_0)^2 + (y-b_0)^2\right) + \left((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2\right) + \cdots\cdots + \left((x-a_n)^2 + (y-b_n)^2\right)$$

式 3-8

$$d = \sum_{m=0}^{n}\left((x-a_m)^2 + (y-b_m)^2\right)$$

式 3-9

式 3-7 中 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 分别是曲线上点 $M(x，y)$ 到各个极点的距离。d 及 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 为大于等于 0 的实数。

平方距极圆实际上是圆，可以通过简化式（3-8）证明它。

证明：

将式 3-8 各项分解得

$$d = \left(x^2 - 2a_0x + a_0^{\ 2}\right) + \left(x^2 - 2a_1x + a_1^{\ 2}\right) + \cdots\cdots + \left(x^2 - 2a_nx + a_n^{\ 2}\right)$$

$$+\left(y^2 - 2b_0y + b_0^{\ 2}\right) + \left(y^2 - 2b_1y + b_1^{\ 2}\right) + \cdots\cdots + \left(y^2 - 2b_ny + b_n^{\ 2}\right)$$

合并同类项得

$$d=\left(nx^2-2\sum_{m=0}^{n}a_m x+\sum_{m=0}^{n}a_m{}^2\right)+\left(ny^2-2\sum_{m=0}^{n}b_m y+\sum_{m=0}^{n}b_m{}^2\right)$$

将各项平方化得

$$d=n\left(x-\frac{\sum_{m=0}^{n}a_m}{n}\right)^2+\sum_{m=0}^{n}a_m{}^2-n\left(\frac{\sum_{m=0}^{n}a_m}{n}\right)^2+n\left(y-\frac{\sum_{m=0}^{n}b_m}{n}\right)^2+\sum_{m=0}^{n}b_m{}^2-n\left(\frac{\sum_{m=0}^{n}b_m}{n}\right)^2$$

移动常数项得

$$\frac{d-\sum_{m=0}^{n}a_m{}^2+n\left(\frac{\sum_{m=0}^{n}a_m}{n}\right)^2-\sum_{m=0}^{n}b_m{}^2+n\left(\frac{\sum_{m=0}^{n}b_m}{n}\right)^2}{n}=\left(x-\frac{\sum_{m=0}^{n}a_m}{n}\right)^2+\left(y-\frac{\sum_{m=0}^{n}b_m}{n}\right)^2$$

这　　　　是　　　　半　　　　径　　　　为

$$\sqrt{\frac{d-\sum_{m=0}^{n} {a_m}^2+\left(\frac{\sum_{m=0}^{n} a_m}{n}\right)^2-\sum_{m=0}^{n} {b_m}^2+\left(\frac{\sum_{m=0}^{n} b_m}{n}\right)^2}{n}}$$

，圆心在

$$\left(\frac{\sum_{m=0}^{n} a_m}{n},\frac{\sum_{m=0}^{n} b_m}{n}\right)$$

的圆方程，因此平方距极圆是圆。

3.4 不定极圆

定义 9：平面直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 的坐标距离因子，与相应点数学因数乘积得到的泛距离参数，这些泛距离参数的乘幂之和为定值 d 的点的轨迹，称为**不定极圆**。

不定极圆方程：

$$d=\left(k_0(x-a_0)^2+l_0(y-b_0)^2\right)^{j_0}+\left(k_1(x-\right.$$

式 3-10

$$d=\sum_{m=0}^{n}\left(k_m(x-a_m)^2+l_m(y-b_m)^2\right)^{j_m}$$

式 3-11

式 3-10、3-11 中：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 分别是各个极

点的 x 坐标数学因数；

l_0、l_1、l_2……$l_{n\text{-}1}$、l_n 分别是各个极点的 y 坐标数学因数；

j_0、j_1、j_2……$j_{n\text{-}1}$、j_n 分别是各个极点的乘幂；

$k_m(x-a_m)^2+l_m(y-b_m)^2$ 是泛距离参数；

$(x-a_0)^2$、$(x-a_1)^2$……$(x-a_n)^2$、$(x-a_m)^2$ 是 x 坐标距离因子；

$(y-b_0)^2$、$(y-b_1)^2$……$(y-b_n)^2$、$(y-b_m)^2$ 是 y 坐标距离因子。

其中：

k_0、k_1、k_2……$k_{n\text{-}1}$、$k_n \geq 0$ 的实数；

l_0、l_1、l_2……$l_{n\text{-}1}$、$l_n \geq 0$ 的实数；

j_0、j_1、j_2……$j_{n\text{-}1}$、j_n 为实数；

d 为实数（就是说极直径 d 可以是负值）。

从方程和定义上看，由于不定极圆的数学因数大于等于零，因此方程中不会出现复数情况。

从方程式分析，曳线极圆、因数极圆、极圆、平方距极圆是不定极圆的特例。

a) 曳线极圆：

曳线极圆的极点数学因数为：

$k_0 = k_n = 1$

$k_1 = k_2 = \ldots\ldots = k_{n-1} = 4$

$l_0 = l_n = 1$

$l_1 = l_2 = \ldots\ldots = l_{n-1} = 4$

极点的乘幂为：

$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots\ldots = j_{n-1} = j_n = 0.5$

且，所有极距 d_0、d_1、$d_2 \ldots\ldots d_n \geqslant 0$。

b) 因数极圆：

因数极圆的极点数学因数为：

k_0、k_1、$k_2 \ldots\ldots k_{n-1}$、k_n 不等

l_0、l_1、$l_2 \ldots\ldots l_{n-1}$、l_n 不等

但是 $k_0 = l_0$、$k_1 = l_1$、$k_2 = l_2 \ldots\ldots k_{n-1} = l_{n-1}$、$k_n = l_n$

极点的乘幂为：

$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots\ldots = j_{n-1} = j_n = 0.5$

且，所有极距 d_0、d_1、$d_2 \ldots\ldots d_n \geqslant 0$。

c) 极圆：

极圆的极点数学因数为：

$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots\ldots = k_{n-1} = k_n = 1$

$l_0 = l_1 = l_2 = \ldots\ldots = l_{n-1} = l_n = 1$

极点的乘幂为：

$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots\ldots = j_{n-1} = j_n = 0.5$

同时极圆也是因数极圆的特例，对应的因数极圆极点数学因数为：

$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots\ldots = k_{n-1} = k_n = 1$

$l_0 = l_1 = l_2 = \ldots\ldots = l_{n-1} = l_n = 1$

的状态。

且，所有极距 d_0、d_1、$d_2 \ldots\ldots d_n \geqslant 0$。

d) 平方距极圆：

平方距极圆的极点数学因数为：

$k_0=k_1=k_2=......=k_{n-1}=k_n=1$

$l_0=l_1=l_2=......=l_{n-1}=l_n=1$

极点的乘幂为：

$j_0=j_1=j_2=......=j_{n-1}=j_n=1$

3.5 复不定极圆

定义 10：复平面直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2......F_n 的自由幂坐标距离因子，与相应点数学因数乘积得到的泛距离参数，这些泛距离参数的乘幂之和为定值 d 的点的轨迹称为**复不定极圆**。

复不定极圆方程：

$$d=\left(k_0\left(x-a_0\right)^{hx_0}+l_0\left(y-b_0\right)^{hy_0}\right)^{j_0}+\left(k_1\left(x-a_1\right)^{hx_1}+l_1\left(y-b_1\right)^{hy_1}\right)^{j_1}$$

$$+\cdots\cdots+\left(k_n\left(x-a_n\right)^{hx_n}+l_n\left(y-b_n\right)^{hy_n}\right)^{j_n}$$ 式 3-12

$$d=\sum_{m=0}^{n}\left(k_m\left(x-a_m\right)^{hx_m}+l_m\left(y-b_m\right)^{hy_m}\right)^{j_m}$$ 式 3-13

式中：

k_0、k_1、k_2......k_{n-1}、k_n 分别是各个极点的 x 坐标数学因数；

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、l_n 分别是各个极点的 y 坐标数学因数；

j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n 分别是各个极点的乘幂；

$k_m(x-a_m)^{hx_m}+l_m(y-b_m)^{hy_m}$ 是泛距离参数；

$(x-a_0)^{hx_0}$、$(x-a_1)^{hx_1}$……$(x-a_n)^{hx_n}$ 是 x 坐标自由幂距离因子；

$(y-b_0)^{hy_0}$、$(y-b_1)^{hy_1}$……$(y-b_n)^{hy_n}$ 是 y 坐标自由幂距离因子；

hx_0、hx_1、hx_2、……hx_n 是 x 坐标距离因子的自由幂；

hy_0、hy_1、hy_2、……hy_n 是 y 坐标距离因子的自由幂。

其中 d，k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n，l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、l_n，j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n，hx_0、hx_1、hx_2、……hx_n，hy_0、hy_1、hy_2、……hy_n 均为任意实数（另行讨论这些数为虚数的情况）。

（就是说极直径 d 等参数可以是负值）。

从方程和定义上看，复不定极圆会出现复数的情况，而不定

极圆是复不定极圆的特例。

当复不定极圆的极点数学因数为：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、$k_n \geq 0$ 的实数；

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、$l_n \geq 0$ 的实数；

极点的乘幂为：

j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n 为实数。

自由幂为：

$hx_0 = hx_1 = hx_2 = \ldots\ldots = hx_{n-1} = hx_n = 2$

$hy_0 = hy_1 = hy_2 = \ldots\ldots = hy_{n-1} = hy_n = 2$

时，复不定极圆就是不定极圆了。

第 4 章　极圆曲面

空间极圆曲面是在空间直角坐标系内，多个定点以一定的数学关系联系起来，符合其数学关系的无数个点的集合构成的曲面。这类曲面包括椭球面、球面等，以及超出椭球面与球面的更加广泛的曲面范畴。

4.1　极圆曲面的定义

定义 11：空间直角坐标系内，与多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 的距离的和等于常数 d 的动点 $M(x，y，z)$的轨迹，即到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 距离之和为定值的点的集合称为**极圆曲面**。这些定点 F_0、F_1、F_2……F_n 称为极圆曲面的**极点**，极点坐标为 $F_0(a_0，b_0，c_0)$、$F_1(a_1，b_1，c_1)$、$F_2(a_2，b_2，c_2)$……$F_n(a_n，b_n，c_n)$。；关于这条极园曲面的所有极点的总和称为此极园曲面的**极点序列**，用 $F_{i\sim n}$ 表示；由极园曲面的所有极点序列构成的集合称为此极园曲面的**极点集合**，用 $F=\{F_i(x_i，y_i，z_i)：i=0，1，2……n\}$表示。常数 d 称为极圆曲面的**极直径**。

如图33是7个极点的极圆曲面，有7个与曲线相关的定点 F_0、F_1、F_2、F_3、F_4、F_5、F_6，定点 F_0 在坐标原点上，定点 F_1、F_2 在x坐标轴上，以原点为对称中心对称分布；定点 F_3、F_4、F_5、F_6 在 yz 坐标平面上，F_3 与 F_6、F_4 与 F_5 以 y 坐标轴为对称轴对称分布，F_3 与 F_4、F_5 与 F_6 以 z 坐标轴为对称轴对称分布，F_3 与 F_5、F_4 与 F_6 以坐标原点为对称中心对称分布；这些定点到曲面上动点 $M(x，y，z)$ 的连线分别是 F_0M、F_1M、F_2M、F_3M、F_4M、F_5M、F_6M，这些连线的和为定值（常数）d。

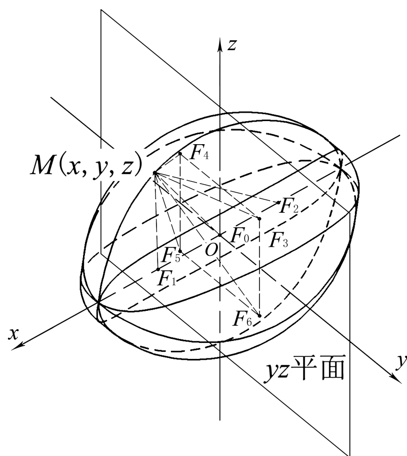


图 33， 7 个极点的极圆曲面

4.2 极圆曲面方程

建立 xyz 空间直角坐标系，设 $M(x, y, z)$是极圆曲面上任意一点，若 $M(x, y, z)$点与 F_0、F_1、F_2……F_n 各点的距离的和等于 d，即：

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n$$

式 4-1

则极圆曲面方程为：

$$d = \sqrt{(x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + (z-c_0)^2} + \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}$$

$$+ \cdots\cdots + \sqrt{(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 + (z-c_n)^2}$$ 式 4-2

$$d=\sum_{m=0}^{n}\sqrt{(x-a_m)^2+(y-b_m)^2+(z-c_m)^2}$$ 式 4-3

式 4-1 中：

d 是大于等于 0 的实数，为动点到所有极圆曲面极点距离的总和——极圆曲面极直径；

动点到极点距离集（d_0、d_1、d_2……d_n）中的元素分别是曲面上点 $M(x, y, z)$到各个极点的距离，极点距离集中的元素 d_0、d_1、d_2……d_n 是大于等于 0 的实数；

式中所有数为实数。

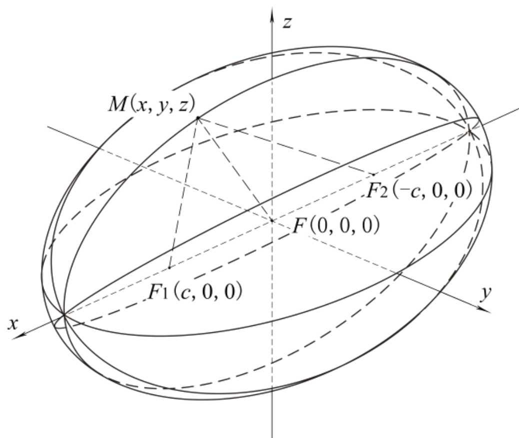


图 34， 3 个极点的极圆曲面曲面

4.3 极圆曲面的种类

球面的圆点数量为 1，椭球面的焦点数量为 2，在空间直角坐标系中的分布是有规律的，要么是一个定点，要么是在同一条

直线上，球面或椭球面的几何特性就是一定的。但是极圆曲面的极点数量可以超过 2 个，极点有规律的分布，可以得到有规律的极圆曲面；极点的不规律分布，致使曲面失去规律性。极圆曲面的极点越多，曲面的复杂程度越高，极圆曲面的极点越少，曲面越趋于规律化。

依据极圆曲面的对称规律特性，把极圆曲面分为不对称极圆曲面、正极圆曲面、轴对称极圆曲面。

4.3.1 不对称极圆曲面

不对称极圆曲面是极圆曲面上点不关于任何直线、任何点、任何平面对称的所有极圆曲面的总称，简称极圆曲面；不对称极圆曲面上的点不具有对称性，点和点之间不相互对称。

4.3.2 正极圆曲面

定义 12：空间直角坐标系内，如果极圆曲面上的所有相对应点以坐标系原点为中心，同时关于 x 轴对称，关于 y 轴对称，关于 z 轴对称，关于原点对称，并且关于 xy 坐标平面对称，关于 xz 坐标平面对称，关于 yz 坐标平面对称，则称此极圆曲面为**正极圆曲面**。

如图 35 所示是 7 极点正极圆曲面，极点 F_0 重合在原点上，是这个正极圆曲面的中点，极点 F_1，F_2 在 x 轴上对称分布，以原点为中心对称，以 yz 坐标平面为对称面；极点 F_3，F_4，F_5，F_6 在 yz 坐标平面上，并以原点为中心对称，以 y 轴和 z 轴为对称轴；极点 F_3 与 F_4，F_5 与 F_6 以 z 轴为对称轴，F_3 与 F_6，F_4 与 F_5 以 y 轴为对称轴，F_3 与 F_5，F_4 与 F_6 以原点为中心对称，并以原点为中心对称。此正极圆曲面是关于 x 轴、y 轴对称和 z 轴对称的，同时关于原点对称。

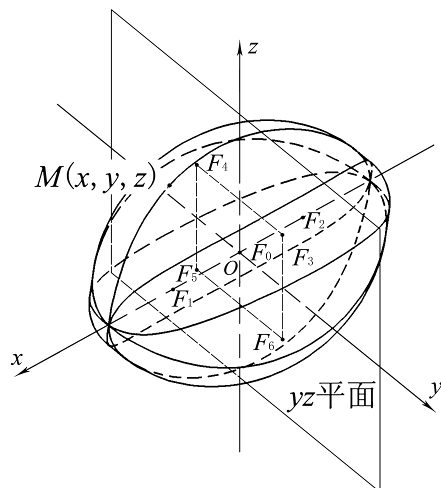


图 35 a， 7 个极点的正极圆曲面的极点分布

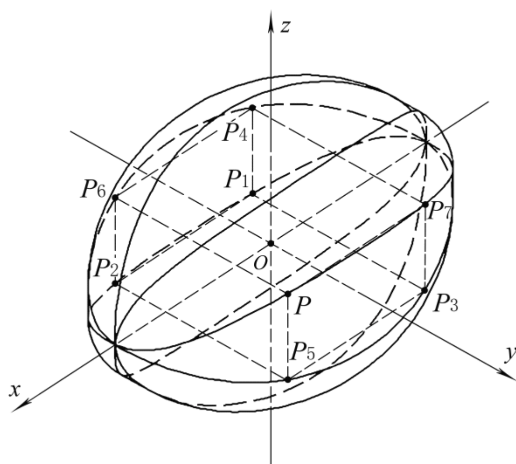


图 35b， 7 个极点的正极圆曲面上点的对称关系

曲面上任意点 $P(x, y, z)$，因为曲面关于原点对称，所以点 P 关于原点的对称点 $P_1(-x, -y, -z)$，关于 x 轴的对称点 $P_2(x, -y, -z)$，关于 y 轴的对称点 $P_3(-x, y, -z)$，关于 z 轴的对称点 $P_4(-x, -y, z)$，关于 xy 坐标平面的对称点 $P_5(x, y, -z)$，关于 xz 坐标平面的对称点 $P_6(x, -y, z)$，关于 yz 坐标平面的对称点 $P_7(-x, y, z)$ 也在曲面上，所以此曲面同时关于原点、x 轴、y 轴、z 轴、xy 坐标平面、xz 坐标平面、yz 坐标平面对称，共有 8 个点相互对称。这种极圆曲面就是正极圆曲面，x 轴、y 轴、z 轴是正极圆曲面的对称轴，xy 坐标平面、xz 坐标平面、yz 坐标平面正极圆曲面的对称平面，原点是正极圆曲面的对称中心。

4.3.3　轴对称极圆曲面

定义 13：空间直角坐标系内，如果极圆曲面上点只关于一条坐标轴或两个坐标平面对称则称此极圆曲面为**轴对称极圆曲面**。

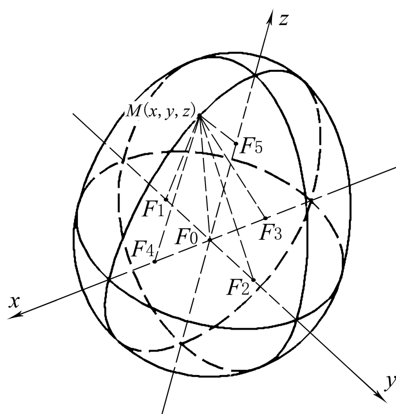


图 36，　6 个极点的轴对称极圆曲面

如图 36 所示是 6 极点轴对称极圆曲面，图中 F_0 重合在原点上，F_1，F_2 在 y 轴上对称分布，对称中心为 F_0，以 x 轴为对称轴；F_3，F_4 在 x 轴上对称分布，对称中心为 F_0，以 y 轴为对称轴；F_5 在 z 轴上，没有关于 F_0 的对称点。此轴对称极圆曲面只有一个对称轴，是关

于 z 轴和 xz 坐标平面、yz 坐标平面对称的，没有对称中心。

第 **5** 章　极圆曲面的几何性质

5.1　对称性

极圆曲面的对称性有轴对称、坐标平面对称和点对称三种状态，轴对称极圆曲面上的点是只关于两条坐标轴或两个坐标平面对称的，它的极点数量和极点坐标，也是关于这两条坐标轴或两个坐标平面对称；正极圆曲面上的点是关于原点对称，关于三条坐标轴和三个坐标平面对称的，它的的极点数量和极点坐标，也是关于原点对称，关于三条坐标轴和三个坐标平面对称的。

定理 1：如果极圆曲面的所有极点都在一条坐标轴上，那么这个极圆曲面上点是关于此坐标轴对称的,即是轴对称极圆曲面。

定理 1 说明：极圆曲面的所有极点在同一坐标轴上时，这个极圆曲面必然是轴对称极圆曲面。

证明：

已知条件：

一个极圆曲面的所有极点 F_0、F_1、F_2……F_n 等都在同一个坐标轴 x 上。

分析：

通过 x 坐标轴作一平面 PA，使 x 坐标轴在这一平面上，取极圆曲面上一点 P，同时 P 点也在平面 PA 上；如果极圆曲面的所有极点都在坐标轴上，极圆曲面上点也是关于坐标轴对称的这一结果成立，那么点 P 关于 x 坐标轴的对称点 Q 必然在曲面上；则点 Q 到坐标轴的距离与点 P 到坐标轴的距离相等，并且点 Q 与点 P 的连线 PQ 垂直于 x 坐标轴。

设：

曲面上任意一点到极圆曲面所有极点的距离集为 U（d_0、d_1、d_2……d_n），点 P 到极圆曲面所有极点的距离集为 UP（d_0、d_1、d_2……d_n），点 Q 到极圆曲面所有极点的距离集为 UQ（d_0、d_1、d_2……d_n）。

极圆曲面方程的简化形式：

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n$$

式 5-1

式 5-1 中 d_0、d_1、d_2……d_n 是曲面上点 P 到各个极点距离集 U 的元素；

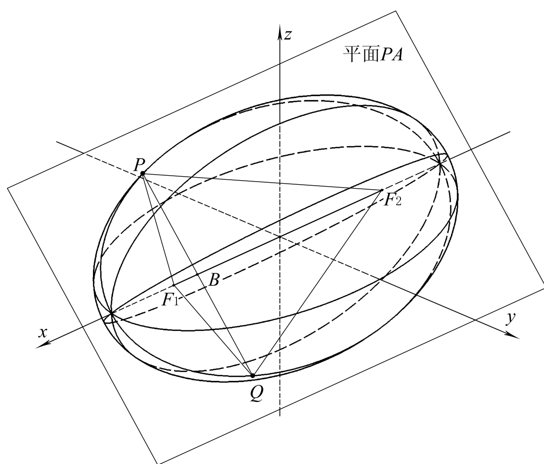


图 37

作图 37：

i. 以 x 坐标轴为对称轴作轴对称极圆曲面，
ii. 通过极点所在轴 x 轴作一平面 PA，
iii. 取曲面上一点 P，并且 P 点在平面 PA 上，
iv. 取极点 F_1、F_2 作为证明基本极点；
v. 作点 P 与极点 F_1 的连线 PF_1，点 P 与极点 F_2

的连线 PF_2，PF_1、PF_2 是对应式 5-1 中，曲面上点 P 到各个极点距离集 UP＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的相应元素；

vi. 在平面 PA 上作点 P 与 x 坐标轴的垂线 PB，延长垂线 PB 到 Q，使 QB＝PB；

vii. 作点 Q 与极点 F_1 的连线 QF_1，点 Q 与极点 F_2 的连线 QF_2；

判断：

如果能够判断曲面上点 Q 到所有极点的距离等于曲面上点 P 到所有相应极点的距离，即距离集 UP＝（d_0、d_1、d_2……d_n）与距离集 UQ＝（d_0、d_1、d_2……d_n）相等，那么就可以依据式 5-1 确定点 Q 在曲面上是成立的,即证明 UQ＝UP＝U 就证明了定理 1 的成立。

证：

图 37 中，因为 PB 垂直于 x 轴，所以△PBF_1 是直角三角形，同理，△QBF_1 也是直角三角形；且 QB=PB，BF_1 为共有线。

根据三角形定理——如果两个三角形的一个角相等，两条临边相等，那么这两个三角形全等。△PBF_1 的两条边 PB、

BF_1 的夹角为直角，等于△QBF_1 的两条边 QB、BF_1 的夹角，

BF_1=BF_1，PB=QB，所以△PBF_1 与△QBF_1 是全等三角形，

PF_1=QF_1。同理，$\triangle PBF_2$ 与 $\triangle QBF_2$ 也是全等三角形，PF_2＝

QF_2。

因此，点 Q 与极点 F_1 的连线 QF_1，点 Q 与极点 F_2 的连线 QF_2，也是式 5-1 中曲面上对称点 Q 到各个极点距离集 UQ＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的相应元素，距离集 UP＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的元素与距离集 UQ＝（d_0、d_1、d_2……d_n）的元素对应相等，所以距离集 UP＝UQ＝U。

故 Q 是这个极圆曲面上的点，定理 1 成立。

5.2　球面

球面是椭球面的特殊情况，如果一个椭球面的两个焦点重合，则这个椭球面是球面。另一方面，球面也是极圆曲面的特殊状态，无论极圆曲面的极点有多少个，如果这个极圆曲面所有的极点重合为一点，或者这个极圆曲面的极点数量为 1，那么，这个极圆曲面同样也是圆。如图 38，是一个有 n 个极点的极圆曲面，它们的 n 个极点重合于坐标系原点，这个极圆曲面是球面。

定理 2：有 n 个极点的极圆曲面，如果极圆曲面的所有极点重合于一点，那么这个极圆曲面是球面，球心在极点上，球面半径为 d/n。

证明：

已知：一个极圆曲面的所有极点重合于坐标系原点。

因此：曲面上点 $M(x, y, z)$ 到所有极点的距离相等。

依据极圆曲面方程

$$d = d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_n$$

可知：

$$d = d_0 = d_1 = \cdots\cdots = d_n$$

所以：

$$d = nd_0$$

极圆曲面方程变为：

$$\frac{d}{n} = d_0$$

因为：

$$d_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

所以方程式为：

$$\left(\frac{d}{n}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

这是标准的半径为 $\frac{d}{n}$ 的球面方程，因此定理 2 成立。

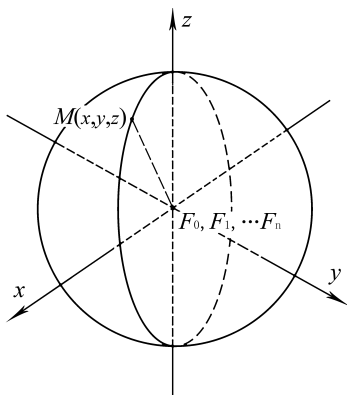


图 38，极点重合于原点的 n 个极点正极圆曲面

5.3 椭球面

椭球面是极圆曲面的特殊状态，如果一个极圆曲面的极点为两个，则这个极圆曲面是椭球面。如果极圆曲面极点数量为偶数，其中一半极点重合于点 F_1，相同数量的另一半极点重合于点 F_2，且点 F_1 与点 F_2 不重合，这个极圆曲面也一定是椭球面。图 39 中，6 个极点的正极圆曲面的 3 个极点 F_1，F_2，F_3 重合于点 F_1，3 个极点 F_4，F_5，F_6 重合于点 F_4，6 个极点的数量和坐标均关于 y 轴对称，这个极圆曲面就是一个椭球面，具有椭球面的几何特性，是关于 x 轴、y 轴、z 轴对称，关于 xy 坐标平面、yz 坐标平面、zx 坐标平面对称，即关于原点对称；但是，如果两个重合点上的极点重合数量不同，即使是只有两个重合点，这个极圆曲面也不是椭球面，如图 40，在 z 轴上的 6 个极点的极圆曲面，其中 2 个极点 F_1，F_2 重合于点 F_1，4 个极点 F_3，F_4，F_5，F_6 重合于点 F_3，它们的坐标参数关于 y 轴对称；但是，由于极点数量不对称，这个极圆曲面不是椭球面，不具有椭球面的几何特性，只有一个对称轴和两个对称平面，是关于 z 轴对称，关于 yz 坐标平面、zx 坐标平面对称；对于原点、x 轴、y 轴、xy 坐标平面是不对称的。

定理 3：如果一个极圆曲面的极点数量为偶数，其中 1/2 的极点重合于 F_1 点，1/2 的极点重合于 F_2 点，这个极圆曲面是椭球面。

证明：

已知：一个极圆曲面的极点数量为偶数 n，为 F_1、F_2……F_n，其中 $n/2$ 的极点重合于一点 F_1（a_1，b_1，c_1），另外 $n/2$ 的极点重合于另一点 F_n（a_n，b_n，c_n）。

因此：曲面上点 $M(x，y，z)$到极点 F_1、F_n 的距离为 d_1、d_n。

依据极圆曲面方程

$$d = d_1 + d_2 + \cdots \cdots + d_n$$

可知：

$$d_1 = d_1 = d_2 = \cdots\cdots = d_{n/2}$$

$$d_n = d_{n/2+1} = d_{n/2+2} = \cdots\cdots = d_n$$

所以：

$$d = \frac{n}{2}d_1 + \frac{n}{2}d_n$$

极圆曲面方程变为：

$$\frac{2d}{n} = d_1 + d_n$$

因为：

$$d_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}$$

$$d_n = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2}$$

所以方程式为：

$$\frac{2d}{n} = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2} + \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2}$$

这与椭球面方程一致，因此定理 3 成立。

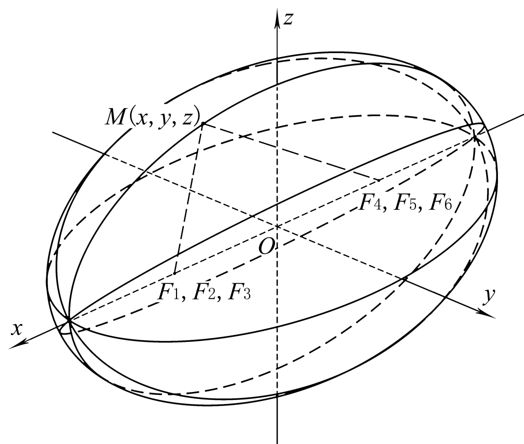


图 39，3 个极点和 3 个极点数量和坐标关于 y 轴和原点均对称

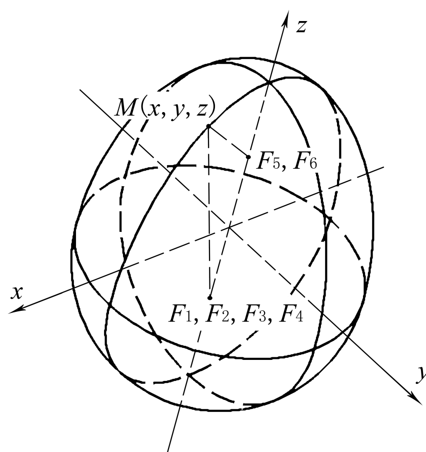


图 40，6 个极点坐标关于 y 轴对称，但极点数量不对称

第 6 章　极圆曲面的扩展

6.1　因数极圆曲面

与曳线极圆曲面相类似，如果曲面上点 $M(x，y，z)$到各个极点的距离计入曲面方程的次数不是 1，那么，极圆曲面方程式就发生了改变。

定义 14：空间直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 距离与相应点几何因数 k_0、k_1、k_2……$k_{n\text{-}1}$、k_n 乘积后的总和为定值 d 的点的轨迹，称为**因数极圆曲面**。

因数极圆曲面方程：

$$d = k_0 d_0 + k_1 d_1 + \cdots\cdots + k_{n-1} d_{\mathrm{n\text{-}1}} + k_n d_{\mathrm{n}}$$　式 6-1

$$d = k_0\sqrt{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2+(z-c_0)^2} + k_1\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}$$

$$+\cdots\cdots+k_n\sqrt{(x-a_{\mathrm{n}})^2+(y-b_{\mathrm{n}})^2+(z-c_n)^2}$$　式 6-2

$$d = \sum_{\mathrm{m=0}}^{\mathrm{n}} k_m\sqrt{(x-a_{\mathrm{m}})^2+(y-b_{\mathrm{m}})^2+(z-c_m)^2}$$　式 6-3

式中 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 分别是曲面上点 $M(x，y，z)$到各个极点的距离。k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 分别是各个极点的几何因数，表示曲面上点 $M(x，y，z)$相对应到各个极点的距离计入方程的系数（次数）。d 及 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 为大于等于 0 的实数。

6.2　平方距极圆曲面（球面）

定义 15：空间直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 距离平方的和为定值 d 的点的轨迹，称为**平方距极圆曲面**。

平方距极圆曲面方程：

$$d = {d_0}^2 + {d_1}^2 + \cdots\cdots + {d_{n-1}}^2 + {d_n}^2$$ 式 6-4

$$d = \left((x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + (z-c_0)^2\right) + \left((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2\right) + \cdots\cdots + \left((x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 + (z-c_n)^2\right)$$ 式 6-5

$$d = \sum_{m=0}^{n}\left((x-a_m)^2 + (y-b_m)^2 + (z-c_m)^2\right)$$ 式 6-6

式中 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 分别是曲面上点 $M(x，y，z)$到各个极点的距离。d 及 d_0、d_1、d_2……d_{n-1}、d_n 为大于等于 0 的实数。

平方距极圆曲面实际上是球面。

6.3　不定极圆曲面

定义 16：空间直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 的坐标距离因子，与相应点数学因数乘积得到的泛距离参数，这些泛距离参数的乘幂之和为定值 d 的点的轨迹，称为**不定极圆曲面**。

不定极圆曲面方程：

$$d=\left(k_0(x-a_0)^2+l_0(y-b_0)^2+s_0(z-c_0)^2\right)^{j_0}+\left(k_1(x-a_1)^2+l_1(y-b_1)^2+s_1(z-c_1)^2\right)^{j_1}+\cdots+\left(k_n(x-a_n)^2+l_n(y-b_n)^2+s_n(z-c_n)^2\right)^{j_n}$$ 式 6-7

$$d=\sum_{m=0}^{n}\left(k_m(x-a_m)^2+l_m(y-b_m)^2+s_m(z-c_m)^2\right)^{j_m}$$ 式 6-8

式中：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 分别是各个极点的 x 坐标数学因数；

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、l_n 分别是各个极点的 y 坐标数学因数；

s_0、s_1、s_2……s_{n-1}、s_n 分别是各个极点的 z 坐标数学因数；

j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n 分别是各个极点的乘幂；

$k_m(x-a_m)^2+l_m(y-b_m)^2+s_m(z-c_m)^2$ 是泛距离参数；

$(x-a_0)^2$、$(x-a_1)^2$ …… $(x-a_n)^2$、$(x-a_m)^2$ 是 x 坐标距离因子；

$(y-b_0)^2$、$(y-b_1)^2$ …… $(y-b_n)^2$、$(y-b_m)^2$ 是 y 坐标距离因子。

$(z-c_0)^2$、$(z-c_1)^2$ …… $(z-c_n)^2$、$(z-c_m)^2$ 是 y 坐标距离因子。

其中：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、$k_n \geq 0$ 的实数；

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、$l_n \geq 0$ 的实数；

s_0、s_1、s_2……s_{n-1}、$s_n \geq 0$ 的实数；

j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n 为实数；

d 为实数（就是说极直径 d 可以是负值）

从方程和定义上看，由于不定极圆曲面的数学因数大于等于零，因此方程中不会出现复数情况。

从方程式分析，因数极圆曲面、极圆曲面、平方距极圆曲面是不定极圆曲面的特例。

a) 因数极圆曲面：

因数极圆曲面的极点数学因数为：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 不等

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、l_n 不等

s_0、s_1、s_2……s_{n-1}、s_n 不等

但是 $k_0 = l_0 = s_0$、$k_1 = l_1 = s_1$、$k_2 = l_2 = s_2$……$k_{n-1} = l_{n-1} = s_{n-1}$、$k_n = l_n = s_n$

极点的乘幂为：

$j_0 = j_1 = j_2 = …… = j_{n-1} = j_n = 0.5$

且，所有极距 d_0、d_1、d_2……$d_n \geqslant 0$。

b) 极圆曲面：

极圆曲面的极点数学因数为：

$k_0 = k_1 = k_2 = …… = k_{n-1} = k_n = 1$

$l_0 = l_1 = l_2 = …… = l_{n-1} = l_n = 1$

$s_0 = s_1 = s_2 = …… = s_{n-1} = s_n = 1$

极点的乘幂为：

$j_0 = j_1 = j_2 = …… = j_{n-1} = j_n = 0.5$

同时极圆曲面也是因数极圆曲面的特例，对应的因数极圆曲面极点数学因数为：

$k_0 = k_1 = k_2 = …… = k_{n-1} = k_n = 1$

$l_0 = l_1 = l_2 = …… = l_{n-1} = l_n = 1$

$s_0 = s_1 = s_2 = …… = s_{n-1} = s_n = 1$

的状态。

且，所有极距 d_0、d_1、d_2……$d_n \geqslant 0$。

c) 平方距极圆曲面：

平方距极圆曲面的极点数学因数为：

$k_0 = k_1 = k_2 = …… = k_{n-1} = k_n = 1$

$l_0 = l_1 = l_2 = …… = l_{n-1} = l_n = 1$

$s_0 = s_1 = s_2 = …… = s_{n-1} = s_n = 1$

极点的乘幂为：

$j_0 = j_1 = j_2 = …… = j_{n-1} = j_n = 1$

6.4　复不定极圆曲面

定义 17：空间直角坐标系内，一动点到多个定点 F_0、F_1、F_2……F_n 的自由幂坐标距离因子，与相应点数学因数乘积得到的泛距离参数，这些泛距离参数的乘幂之和为定值 d 的点的轨迹，称为复**不定极圆曲面**。

复不定极圆曲面方程：

$$d=\left(k_0(x-a_0)^{hx_0}+l_0(y-b_0)^{hy_0}+s_0(z-c_0)^{hz_0}\right)^{j_0}+\left(k_1(x-a_1)^{hx_1}+l_1(y-b_1)^{hy_1}+s_1(z-c_1)^{hz_1}\right)^{j_1}$$

$$+\cdots\cdots+\left(k_n(x-a_n)^{hx_n}+l_n(y-b_n)^{hy_n}+s_n(z-c_n)^{hz_n}\right)^{j_n}$$

式 6-9

$$d=\sum_{m=0}^{n}\left(k_m(x-a_m)^{hx_m}+l_m(y-b_m)^{hy_m}+s_m(z-c_m)^{hz_m}\right)^{j_m}$$ 式 6-10

式中：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n 分别是各个极点的 x 坐标数学因数；

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、l_n 分别是各个极点的 y 坐标数学因数；

s_0、s_1、s_2……s_{n-1}、s_n 分别是各个极点的 z 坐标数学因数；

j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n 分别是各个极点的乘幂；

$k_{\mathrm{m}}(x-a_{\mathrm{m}})^{hx_m}+l_m(y-b_{\mathrm{m}})^{hy_m}+s_m(z-c_m)^{hz_m}$ 是泛距离参数；

$(x-a_0)^{hx_0}$ 、$(x-a_1)^{hx_1}$ ……$(x-a_n)^{hx_n}$ 是 x 坐标自由幂距离因子；

$(y-b_0)^{hy_0}$ 、$(y-b_1)^{hy_1}$ ……$(y-b_n)^{hy_n}$ 是 y 坐标自由幂距离因子；

$(z-c_0)^{hz_0}$ 、$(z-c_1)^{hz_1}$ ……$(z-c_n)^{hz_n}$ 是 z 坐标自由幂距离因子；

hx_0、hx_1、hx_2、……hx_n 是 x 坐标距离因子的自由幂；

hy_0、hy_1、hy_2、……hy_n 是 y 坐标距离因子的自由幂。

hz_0、hz_1、hz_2、……hz_n 是 z 坐标距离因子的自由幂。

其中 d，k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、k_n，l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、l_n ，

s_0、s_1、s_2……s_{n-1}、s_n，j_0、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n，hx_0、hx_1、hx_2、……hx_n ，hy_0、hy_1、hy_2、……hy_n ，hz_0、hz_1、hz_2、……hz_n 均为任意实数（另行讨论这些数为虚数的情况）。

从方程和定义上看，复不定极圆曲面会出现复数的情况，而不定极圆曲面是复不定极圆曲面的特例。

当复不定极圆曲面的极点数学因数为：

k_0、k_1、k_2……k_{n-1}、$k_n \geq 0$ 的实数；

l_0、l_1、l_2……l_{n-1}、$l_n \geq 0$ 的实数；

s_0、s_1、s_2……s_{n-1}、$s_n \geq 0$ 的实数；

极点的乘幂为：

$j0$、j_1、j_2……j_{n-1}、j_n 为实数。

自由幂为：

$$hx_0 = hx_1 = hx_2 = \ldots\ldots = hx_{n-1} = hx_n = 2$$

$$hy_0 = hy_1 = hy_2 = \ldots\ldots = hy_{n-1} = hy_n = 2$$

$$hz_0 = hz_1 = hz_2 = \ldots\ldots = hz_{n-1} = hz_n = 2$$

时，复不定极圆曲面就是不定极圆曲面了。

附录　圆、椭圆与极园几何性质的比较

	圆	椭圆	极园
标准方程			
中心极点数量	1 个（圆心）	2 个（焦点）	1~∞个（极点）
几何范围	$-r \leq x \leq r$, $-r \leq y \leq r$，	$-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$，	不同的极园有不同的几何范围
顶点	可以看作是 4 个顶点 A_1（r，0），A_2（-r，0），B_1（r，0），B_2（-r，0）	4 个顶点 A_1（a，0），A_2（-a，0），B_1（b，0），B_2（-b，0）	不同的极园有不同的顶点
轴对称性	∞个对称轴，任意一条过圆心的直线都是对称轴	两个方向对称，有两条对称轴，x 轴和 y 轴	正极园至少在两个方向上是对称，可以有两条以上的对称轴；轴对称极园在一个方向上是对称的，有一条对称轴；非对称极园没有对称轴
中心对称性	是中心对称的	是中心对称的	正极园是中心对称的；轴对称极园和非对称极园不是中心对称的
离心率	无	有	不同的极园可能有离心率，也可能没有离心率

参考文献：

［1］ 同济大学应用数学系.高等数学.北京:高等教育出版社,1978 年 3 月

［2］ 吕林根,许子道.解析几何.北京:高等教育出版社,1960 年 9 月

［3］ 欧宜贵,李文雅.空间解析几何.合肥:中国科学技术大学出版社

［4］ 梅向明,刘增贤,门树慧.高等几何.北京:高等教育出版社,1987 年 5 月

［5］ 朱德祥,朱维宗.高等几何.北京:高等教育出版社,1983 年 5 月

［6］ 叶其孝,沈永欢.实用数学手册.北京:科学出版社,1992 年 8 月

后记

在我的生活学习过程中，很早就形成了极圆的基本理论模式，由于特殊的原因没有能够拿出来。但是，一直在证实极圆论点是否已经在现有的理论体系中存在，有谁发表过同类论点。许多许多年了，终究没有放弃它，很想寻找机会公开它；后来又在王乃谦的鼓动下，决定将“极圆”及“空间极圆曲面”理论，作为**在国际上王锡哲和王乃谦个人首先提出的理论论点**发表它（**当然，如果已经有人发表过与此文相同的论点，请明确指出，我将予以及时纠正**）。在发表准备阶段，进一步补充了一些内容，在理论上扩展了范围，并且为今后的研究工作留出了空间。后续还会不断完善文章内容，再出几个定理和有发展性的论点的。

无论极圆曲线的设想已经经历了多少年，但是对极圆与极圆曲面的研究工作只是一个开始，不是一个人十年八年就可以完成的，也不是一个团体三年五年就能完全揭示其整体内容的，甚至不是一个国家的研究机构可以断言包揽其整个理论体系的。这需要许多科学工作者，包括国内外的数学家、工程师、教师，甚至包括中学生，集合他们的力量在今后的几十年里逐步完善“极圆与极圆曲面” 理论体系。

作者　王锡哲
助手　王乃谦
早期助手　　梁雁

王锡哲数学与物理工作室
2009 年 9 月